Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2006/07 Folha 13

CAPÍTULO IV: Diferenciabilidade

175. (a) Mostre que, se $y = ce^{kx}$, onde c e k são constantes, então $y' = ky$, isto é, a função y varia com uma razão proporcional a si própria.
   (b) Suponha agora que $y = f(x)$ é uma função que varia proporcionalmente a si própria, isto é, $y' = ky$, onde k é constante.
      i. Verifique que, se $g(x) = f(x)e^{-kx}$, então $g'(x) = 0$.
      ii. Conclua que $f(x) = ce^{kx}$ para alguma constante c.

176. Dê exemplos de funções polinomiais de grau 4 com dois pontos de inflexão ou sem pontos de inflexão. Será possível encontrar alguma com exactamente um ponto de inflexão?

177. A equação $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ representa uma hipérbole. Use derivação implícita para provar que $y'' = \dfrac{b^4}{a^2y^3}$ e discuta a sua concavidade.

178. Faça o estudo completo das seguintes funções:
   (a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;
   (b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$;
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;
   (d) $f(x) = \dfrac{4(x-1)}{x^2}$;
   (e) $f(x) = \sqrt{|x|}$;
   (f) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;
   (g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$;
   (h) $f(x) = \begin{cases} e - \frac{1}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1-x}{e^x} & \text{se } x > 0; \end{cases}$
   (i) $f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{4}\log x & \text{se } x > 1, \\ \sqrt{5-x} & \text{se } x \leq 1; \end{cases}$
   (j) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+9}$.

179. Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ no ponto -1.

180. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 1$. Determine os seus polinómios de Taylor de ordem 4 no ponto 0 e no ponto 1.

181. Determine o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto zero, da função f, quando:
   (a) $f(x) = x^3 - 1$;
   (b) $f(x) = e^x$;
   (c) $f(x) = \frac{1}{1+x}$
   (d) $f(x) = \log(1 + x)$;
   (e) $f(x) = \frac{1}{2-x}$;
   (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

182. Determine o polinómio de Taylor:
   (a) de ordem $2n$, quando $f(x) = \cos x$, no ponto 0;
   (b) de ordem $2n + 1$, para $f(x) = \sin x$, no ponto 0.

183. (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n no ponto 0, com resto de Lagrange, da função $\log(1 + x)$.

(b) Mostre que $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$, para qualquer $x \in]0, +\infty[$.

184. Considere a função $f(x) = e^x$ e o seu polinómio de Taylor $p_n(x)$ (já calculado no Exercício **??**) e seja $r_n(x) = e^x - p_n(x)$.

   (a) Mostre que
   $$|r_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

   (b) Use o polinómio de Taylor de ordem 4 para calcular um valor aproximado de $e^{0.2}$.

   (c) O valor de e pode ser calculado tomando $x = 1$ na fórmula de Taylor da função f.

      i. Usando o facto de $e < 3$, explique porque é que
      $$|r_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

      ii. Qual o valor de n que garante que no valor estimado de e as três primeiras casas decimais estão correctas?

   (d) Determine um valor aproximado de $\sqrt{e}$ a menos de 10^{-3}.

185. (a) No Exercício **??** determinou-se o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto 0, da função sin. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n desta função, no ponto 0, e mostre que
   $$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (b) Mostre que $|\sin x - x| \leq \frac{1}{6}|x|^3$.

186. Faça o estudo completo das seguintes funções trigonométricas:

   (a) $y = \tan x$; (b) $y = \cot x$; (c) $y = \sec x$; (d) $y = \csc x$.

187. As funções f e g definidas por $f(x) = \sin(\arcsin x)$ e $g(x) = \arcsin(\sin x)$ são diferentes. Justifique esta afirmação.

188. Use derivação para mostrar que:

   (a) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;

   (b) $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, para todo o $x \in]-1, 1[$.

189. Use as definições de sinh e de cosh para provar as igualdades:

   (a) $\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v$;

   (b) $\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v$.

190. Mostre que:

   (a) $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$; (b) $(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x$;

   (c) $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$; (d) $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$.

191. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}$ e $x < 0$, $\sinh x < x + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.