CAPÍTULO I: Fundamentos

73. Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, A diz-se *vizinhança de x* se x for ponto interior de A. Mostre que:

    (a) A intersecção de duas vizinhanças de x ainda é uma vizinhança de x.

    (b) Se A for vizinhança de x e $A \subseteq B$, então B é vizinhança de x.

    (c) Se x e y são números reais distintos, então existem uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

    (d) Se $\alpha = \sup A$, então A e $\mathbb{R} \setminus A$ não são vizinhanças de α.

74. Para $A \subseteq \mathbb{R}$, mostre que:

    (a) A é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos;

    (b) um ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente de A se e só se toda a vizinhança de x intersecta A.

75. Determine o conjunto dos pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    (a) $\mathbb{Z}$ (b) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $]0, 1]$.

76. Dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$:

    (a) infinito sem pontos de acumulação;

    (b) com exactamente um ponto de acumulação;

    (c) numerável com um conjunto de pontos de acumulação não numerável;

    *(d) com um conjunto de pontos de acumulação infinito numerável.

77. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostre que:

    (a) $\overline{X} = X \cup X'$;

    (b) X é fechado se e só se contém todos os seus pontos de acumulação;

    *(c) se X não tem pontos de acumulação então X é numerável.
    (Sugestão: verificar que X é igual a qualquer conjunto numerável E tal que $E \subseteq X \subseteq \overline{E}$).

78. Prove que cada uma das sucessões cujo termo geral se indica a seguir é limitada e estude a monotonia dessas sucessões.

(a) $x_n = \dfrac{2n}{3n+16}$; (b) $x_n = \dfrac{n}{n^2+2}$;

(c) $x_n = \dfrac{100}{n} + 2(-1)^n$; (d) $x_n = \begin{cases} 10 & \text{se } n = 1 \\ \frac{(-1)^n n - 8}{3n-2} & \text{se } n \neq 1; \end{cases}$

(e) $x_n = \dfrac{2004^n}{n!}$; (f) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ n\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

79. Verifique que as seguintes sucessões não são limitadas e, em cada caso, determine, se possível, uma subsucessão que seja limitada:

(a) $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $((-1)^n n^2 + 2n)_{n\in\mathbb{N}}$; *(c) $\sqrt[n]{n!}$; (d) $n\cos(\frac{\pi n}{4})$.

80. Sejam X um subconjunto não vazio limitado de $\mathbb{R}$ e s o seu supremo. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para s.

81. (a) Sejam X um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para a.

(b) Conclua que qualquer número real é limite de uma sucessão de números racionais e limite de uma sucessão de números irracionais.

82. Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Mostre que (x_n) é uma sucessão crescente.

(b) Prove que, para todo o número natural n, $x_n \leq 3$. (Sugestão: Mostre que $n! \geq 2^{n-1}$).

(c) Será (x_n) uma sucessão convergente? Justifique.

*83. Existirá alguma família de intervalos abertos cuja união contenha $\mathbb{Q}$ mas não contenha $\mathbb{R}$? (Sugestão: considerar uma família numerável de intervalos com largura $\frac{1}{2^n}$ e consultar *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima).

84. Mostre que se a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente então a sucessão $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é também convergente. Será que a recíproca é sempre verdadeira?

85. Usando a definição de limite, verifique as seguintes igualdades:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}+n}{2-n^2} = 0$; (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{\pi-n} = -2$;

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin(\frac{n\pi}{3})}{2n} = \frac{1}{2}$; (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1000}{n^2} = 0$.