

CAPÍTULO I: Fundamentos

1. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?

- (a) 8 é par ou 6 é ímpar. (b) 8 é par e 6 é ímpar.
(c) 8 é ímpar e 6 é ímpar. (d) 8 é par ou 6 é par.

2. Quais das seguintes frases são a negação à proposição apresentada?

Proposição 1: Os pepinos são verdes e têm sementes.

- (a) Os pepinos não são verdes e não têm sementes.
(b) Os pepinos não são verdes ou não têm sementes.
(c) Os pepinos são verdes e não têm sementes.

Proposição 2: Tem-se $2 < 7$ ou 3 é ímpar.

- (a) Tem-se $2 > 7$ e 3 é par. (b) Tem-se $2 \geq 7$ e 3 é par.
(c) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é ímpar. (d) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é par.

3. Construa e compare as tabelas de verdade para as seguintes expressões:

- (a) $p \vee \sim p$ (b) $p \wedge \sim p$ (c) $\sim (p \wedge q)$
(d) $\sim p \vee \sim q$ (e) $p \wedge (q \vee r)$ (f) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

4. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?

- (a) Se 8 for ímpar então 6 é ímpar. (b) Se 8 for par então 6 é ímpar.
(c) Se 8 for ímpar então 6 é par. (d) Se 8 for ímpar e 6 for par então $8 < 6$.

5. Escreva a recíproca, negação e contra-recíproca de cada uma das seguintes expressões:

- (a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (c) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

6. Escreva o recíproco, o contra-recíproco e a negação das seguintes frases:

- (a) Se chove então há nuvens no céu.
(b) Se 229 é primo então Roma é a capital de França.

7. Escreva cada uma das frases na forma de implicação $p \Rightarrow q$.

- (a) Se comeres demasiado bolo ficas mal disposto.
(b) Continua a comer bolo e arrepender-te-ás.
(c) Sai ou chamo a polícia.
(d) Vou-me embora se não pararem de falar.

8. Determine o antecedente e o conseqüente de cada uma das seguintes proposiçöes:

- (a) Um aumento significativo no poder dos computadores é uma condiçäo necessária para futuros avanços tecnológicos.
- (b) Serão introduzidos erros se efectuarmos uma modificaçäo neste programa.
- (c) Para poupar combustível é preciso instalar um bom isolamento térmico, assim como janelas duplas.

9. Construa tabelas de verdade para as seguintes expressöes:

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $p \wedge \sim (\sim p \vee \sim q)$ | (b) $p \wedge q \Rightarrow \sim p$ | (c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)]$ |
| (d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ | (e) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim q \vee \sim p$ | (f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ |
| (g) $((p \vee q) \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p \vee r$ | (h) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ | (i) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$ |
| (j) $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p$ | (k) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ | (l) $\sim ((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r)$ |
| (m) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ | (n) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ | (o) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. |

10. Sem construir tabelas de verdade, verifique que as seguintes expressöes são tautologias:

- (a) $(p \vee \sim r) \wedge [(p \vee \sim r) \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (q \wedge r)$
- (b) $[(p \vee \sim r) \wedge (q \Rightarrow (\sim p \wedge r))] \Rightarrow \sim q$

*11. Prove que uma expressäo não contendo conectivos lögicos além de \Leftrightarrow é uma tautologia se e só se cada variável (letra) aparece um número par de vezes.

12. Analise a validade dos seguintes argumentos:

- (a) Se hoje for segunda-feira amanhã será terça-feira. Mas hoje não é segunda-feira, logo, amanhã não é terça.
- (b) Hoje é segunda ou terça-feira. Mas hoje não é segunda. Então hoje é terça-feira.
- (c) Sendo $p \Rightarrow q$ uma tautologia para que $q \Rightarrow p$ seja uma tautologia é necessário e suficiente que $p \Leftrightarrow q$ seja uma tautologia. Sabendo que $p \Rightarrow q$ é uma tautologia e $p \Leftrightarrow q$ não é uma tautologia então $q \Rightarrow p$ não é uma tautologia.

13. Num certo país cada habitante é um amante da verdade ou é um amante da mentira e, como tal, diz sempre a verdade ou diz sempre a mentira. Ao viajar neste país encontrei o Pedro e o Luís. O Pedro disse-me: “Se eu for um amante da verdade então o Luís é um amante da verdade.” Será Pedro um amante da verdade ou da mentira? E o Luís?

- 14. (a) Sendo $p \Leftrightarrow q$ uma proposiçäo verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?
- (b) Supondo agora que $p \Leftrightarrow q$ é falso, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?
- (c) Sendo $p \Rightarrow q$ uma proposiçäo verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $\sim p \wedge q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$?

*15. (a) Noutro país há, além dos amantes da verdade e da mentira, pessoas normais que mentem só de vez em quando. Ao encontrar um grupo com uma pessoa de cada tipo dizem-me:

Antônio: “Sou normal”. Bruno: “Isso é verdade”. Cristiano: “Eu não sou normal”.
Que podemos concluir?

- (b) No mesmo país encontro o Diogo, que diz ao Eugênio: “Tu dizes mais vezes a verdade do que eu”, que responde: “Isso não é verdade”. Podemos concluir alguma coisa?

CAPÍTULO I: Fundamentos

16. O Artur, o Bernardo e o Carlos, suspeitos de terem assaltado uma loja de chocolates, fazem os seguintes depoimentos:

Artur: “Bernardo é culpado, mas Carlos é inocente”.

Bernardo: “Se Artur é culpado então Carlos é culpado”.

Carlos: “Estou inocente, mas um dos outros dois é culpado”.

- (a) Os três depoimentos são compatíveis?
(b) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
(c) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?
*(d) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentira, quem é inocente e quem é culpado?
17. De entre as seguintes frases assinale as que são proposições atribuindo-lhe o respectivo valor de verdade.
(a) Para todo o x real, $x^2 = x$. (b) Para exactamente um x real, $x^2 = x$.
(c) Para algum $x \in \mathbb{R}$ verifica-se $x^2 = x$. (d) $x^2 = x$.
(e) $xy = xz$ implica $y = z$. (f) Para x, y, z reais $xy = xz$ implica $y = z$.
18. Para cada uma das expressões seguintes determine uma interpretação onde a proposição seja verdadeira e outra onde seja falsa.
(a) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \Rightarrow q(y, x))$ (b) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (\exists y)q(x, y))$.
19. (a) Qual destas proposições é a negação de: “Algumas pessoas gostam de matemática”?
i. Algumas pessoas não gostam de matemática.
ii. Todas as pessoas gostam de matemática.
iii. Ninguém gosta de matemática.
(b) Qual destas proposições é a negação de: “Todas as pessoas gostam de gelados”?
i. Ninguém gosta de gelados.
ii. Todas as pessoas não gostam de gelados.
iii. Existe alguém que não gosta de gelados.
20. Determine a negação de cada uma das seguintes expressões numa forma que não contenha o conectivo \sim como conectivo principal.
(a) $(\forall x)(p(x) \vee \sim p(x))$ (b) $(\exists x)(p(x) \Rightarrow (q(x) \vee r(x)))$
(c) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \Leftrightarrow p(y, x))$ (d) $(\exists y)(\forall x)(p(x, y) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(y)))$.
21. Escreva expressões equivalentes às do exercício anterior utilizando apenas o quantificador \exists e os conectivos lógicos \sim e \vee .

22. Para cada um dos seguintes pares de expressões, indique qual delas é consequência da outra e apresente, se possível, uma interpretação onde sejam não equivalentes:

- (a) $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ e $(\exists y)(\forall x)p(x, y)$
 (b) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ e $((\exists x)p(x)) \wedge ((\exists x)q(x))$
 (c) $((\forall x)p(x)) \wedge ((\forall x)q(x))$ e $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$
 (d) $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)$ e $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$.

23. Apresente, se possível, uma interpretação onde sejam falsas as seguintes expressões:

- (a) $(\forall x)p(x) \Leftrightarrow \sim (\exists x)(\sim p(x))$
 (b) $((\forall x)p(x)) \vee ((\forall x)q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$
 (c) $[(\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)p(x)] \Rightarrow (\exists x)q(x)$
 (d) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(y) \Rightarrow q(x, y)) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow (\forall x)q(x, y))]$
 *(e) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(x, y) \Rightarrow q(x, y)) \Rightarrow (p(z, y) \Rightarrow (\forall x)q(x, y))]$.

24. Verifique que

- (a) $\{x \in \mathbb{N}; x^2 < 15\} = \{x \in \mathbb{N}; 2x < 7\}$
 (b) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 = 2\} = \{x \in A; x \text{ é tigre e } x \text{ é cor-de-rosa}\},$

onde A é o conjunto dos animais terrestres conhecidos até 3/10/2005.

25. Considere os conjuntos

$$R = \{1, 3, \pi, 4.1, 9, 10\} \quad S = \{\{1\}, 3, 9, 10\} \quad T = \{1, 3, \pi\} \quad U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}.$$

Indique, de entre as seguintes proposições, as que são falsas (justifique a sua resposta).

- (a) $1 \in R$ (b) $1 \in S$ (c) $T \subseteq R$
 (d) $S \subseteq R$ (e) $T \subseteq U$ (f) $\emptyset \subseteq S$
 (g) $\{1\} \subseteq S$ (h) $T \in U$ (i) $T \not\subseteq R$.

26. Para A, B e C conjuntos arbitrários, indique quais as afirmações verdadeiras.

- (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$ (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
 (c) $\{\emptyset\} \subseteq A$ (d) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$
 (e) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \not\subseteq C$ (f) Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$ então $A \notin C$.

27. Para $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 4, 7\}$, $C = \{x; x \in \mathbb{Z} \text{ e } 2 \leq x < 5\}$ subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ determine:

- (a) $A \cup B$ (b) $A \cap C$ (c) $A - B$
 (d) $S - A$ (e) $A - S$ (f) $(A \cap B)^c$
 (g) $(B - A)^c \cap (A - B)$ (h) $(C \cap B) \cup A^c$ (i) $(C^c \cup B)^c$.

28. Sendo A e B subconjuntos arbitrários de um conjunto X , indique as igualdades verdadeiras.

- (a) $A \cup A = A$ (b) $B \cap B = B$
 (c) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ (d) $(A^c)^c = A$
 (e) $A - B = (B - A)^c$ (f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
 (g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A = B^c$ (h) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.