Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 — Folha 1

CAPÍTULO I: Fundamentos

1. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?

   (a) 8 é par ou 6 é ímpar. (b) 8 é par e 6 é ímpar.
   (c) 8 é ímpar e 6 é ímpar. (d) 8 é ímpar ou 6 é ímpar.

2. Quais das seguintes frases são a negação à proposição apresentada?

   <u>Proposição 1:</u> Os pepinos são verdes e têm sementes.

   (a) Os pepinos não são verdes e não têm sementes.
   (b) Os pepinos não são verdes ou não têm sementes.
   (c) Os pepinos são verdes e não têm sementes.

   <u>Proposição 2:</u> Tem-se $2 < 7$ e 3 é ímpar.

   (a) Tem-se $2 > 7$ e 3 é par. (b) Tem-se $2 \geq 7$ e 3 é par.
   (c) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é ímpar. (d) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é par.

3. Construa e compare as tabelas de verdade para as seguintes expressões:

   (a) $p \vee \sim p$ (b) $p \wedge \sim p$ (c) $\sim (p \wedge q)$
   (d) $\sim p \vee \sim q$ (e) $p \wedge (q \vee r)$ (f) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

4. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?

   (a) Se 8 for ímpar então 6 é ímpar. (b) Se 8 for par então 6 é ímpar.
   (c) Se 8 for ímpar então 6 é par. (d) Se 8 for ímpar e 6 for par então $8 < 6$.

5. Escreva as proposições recíproca, negação e contra-recíproca de cada uma das seguintes proposições:

   (a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (c) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

6. Escreva o recíproco, o contra-recíproco e a negação das seguintes frases:

   (a) Se chove então há nuvens no céu.
   (b) Se 229 é primo então Roma é a capital de França.

7. Escreva cada uma das frases na forma de implicação $p \Rightarrow q$.

   (a) Se comeres demasiado bolo ficas mal disposto.
   (b) Continua a comer bolo e arrepender-te-ás.
   (c) Sai ou chamo a polícia.
   (d) Vou-me embora se não pararem de falar.

8. Determine o antecedente e o consequente de cada uma das seguintes proposições:

   (a) Um aumento significativo no poder dos computadores é uma condição necessária para futuros avanços tecnológicos.

   (b) Erros serão introduzidos se efectuarmos uma modificação neste programa.

   (c) Para poupar combustível é necessário instalar um bom isolamento térmico, assim como janelas duplas.

9. Construa tabelas de verdade para as seguintes proposições:

   (a) $p \wedge \sim(\sim p \vee \sim q)$ (b) $p \wedge q \Rightarrow \sim p$ (c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)]$
   (d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (e) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim q \vee \sim p$ (f) $(p \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge q)$
   (g) $((p \vee q) \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p \vee r$ (h) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (i) $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p$
   (j) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ (l) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$ (m) $\sim ((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r)$
   (n) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

10. Sem construir tabelas de verdade verifique que as seguintes expressões são tautologias:

    (a) $(p \vee \sim r) \wedge [(p \vee \sim r) \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (q \wedge r)$

    (b) $[(p \vee \sim r) \wedge (q \Rightarrow (\sim p \wedge r))] \Rightarrow \sim q$

*11. Prove que uma expressão não contendo conectivos lógicos além de $\Leftrightarrow$ é uma tautologia se e só se cada variável (letra) aparece um número par de vezes.

12. Num certo país cada habitante é um amante da verdade ou é um amante da mentira e, como tal, diz sempre a verdade ou diz sempre a mentira. Ao viajar neste país encontrei o Pedro e o Luís. O Pedro disse-me: "Se eu for um amante da verdade então o Luís é um amante da verdade."Será Pedro um amante da verdade ou da mentira? E o Luís?

13. (a) Sendo $p \Leftrightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?

    (b) Supondo agora que $p \Leftrightarrow q$ é falso, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?

    (c) Sendo $p \Rightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $\sim p \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$?

*14. (a) Noutro país há, além dos amantes da verdade e da mentira, pessoas normais que mentem só de vez em quando. Ao encontrar um grupo com uma pessoa de cada tipo dizem-me:
    António: *Sou normal.* Bruno: *Isso é verdade.* Cristiano: *Eu não sou normal.*
    Que podemos concluir?

    (b) No mesmo país encontro o Diogo, que diz ao Eugénio: *Tu dizes mais vezes a verdade do que eu*, que responde: *Isso não é verdade.* Podemos concluir alguma coisa?

CAPÍTULO I: Fundamentos

16. O Artur, o Bernardo e o Carlos, suspeitos de terem assaltado uma loja de chocolates, fazem os seguintes depoimentos:

    Artur: "Bernardo é culpado, mas Carlos é inocente".
    Bernardo: "Se Artur é culpado então Carlos é culpado".
    Carlos: "Estou inocente, mas um dos outros dois é culpado".

    (a) Os três depoimentos são compatíveis?

    (b) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

    (c) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?

    *(d) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentira, quem é inocente e quem é culpado?

17. De entre as seguintes frases assinale as que são proposições atribuindo-lhe o respectivo valor de verdade.

    (a) Para todo o x real, $x^2 = x$.
    (b) Para exactamente um x real, $x^2 = x$.
    (c) Para algum $x \in \mathbb{R}$ verifica-se $x^2 = x$.
    (d) $x^2 = x$.
    (e) $xy = xz$ implica $y = z$.
    (f) Para x, y, z reais $xy = xz$ implica $y = z$.

18. Para cada uma das expressões seguintes determine uma interpretação onde a proposição seja verdadeira e outra onde seja falsa.

    (a) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \Rightarrow q(y, x))$
    (b) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (\exists y)q(x, y))$.

19. (a) Qual destas proposições é a negação de: "Algumas pessoas gostam de matemática"?

       i. Algumas pessoas não gostam de matemática.
       ii. Todas as pessoas gostam de matemática.
       iii. Ninguém gosta de matemática.

    (b) Qual destas proposições é a negação de: "Todas as pessoas gostam de gelados"?

       i. Ninguém gosta de gelados.
       ii. Todas as pessoas não gostam de gelados.
       iii. Existe alguém que não gosta de gelados.

20. Determine a negação de cada uma das seguintes expressões numa forma que não contenha o conectivo $\sim$ como conectivo principal.

    (a) $(\forall x)(p(x) \vee \sim p(x))$
    (b) $(\exists x)(p(x) \Rightarrow (q(x) \vee r(x)))$
    (c) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \Leftrightarrow p(y, x))$
    (d) $(\exists y)(\forall x)(p(x, y) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(y)))$.

21. Escreva expressões equivalentes às do exercício anterior utilizando apenas o quantificador $\exists$ e os conectivos lógicos $\sim$ e $\vee$.

22. Para cada um dos seguintes pares de expressões, indique qual delas é consequência da outra e apresente, se possível, uma interpretação onde sejam não equivalentes:

(a) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ e $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$

(b) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ e $((\exists x)p(x)) \wedge ((\exists x)q(x))$

(c) $((\forall x)p(x)) \wedge ((\forall x)q(x))$ e $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$

(d) $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)$ e $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$.

23. Apresente, se possível, uma interpretação onde sejam falsas as seguintes expressões:

(a) $(\forall x)p(x) \Leftrightarrow \sim (\exists x)(\sim p(x))$

(b) $((\forall x)p(x)) \vee ((\forall x)q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$

(c) $[(\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)p(x)] \Rightarrow (\exists x)q(x)$

(d) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(y) \Rightarrow q(x,y)) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow (\forall x)q(x,y))]$

*(e) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(x,y) \Rightarrow q(x,y)) \Rightarrow (p(z,y) \Rightarrow (\forall x)q(x,y))]$.

24. Verifique que

(a) $\{x \in \mathbb{N};\ x^2 < 15\} = \{x \in \mathbb{N};\ 2x < 7\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 = 2\} = \{x \in A;\ x$ é tigre e x é cor-de-rosa$\}$,

onde A é o conjunto dos animais terrestres conhecidos até 30/09/2010.

25. Considere os conjuntos

$R = \{1, 3, \pi, 4.1, 9, 10\}$ $\quad S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$ $\quad T = \{1, 3, \pi\}$ $\quad U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$.

Indique, de entre as seguintes proposições, as que são falsas (justifique a sua resposta).

(a) $1 \in R$ (b) $1 \in S$ (c) $T \subseteq R$

(d) $S \subseteq R$ (e) $T \subseteq U$ (f) $\emptyset \subseteq S$

(g) $\{1\} \subseteq S$ (h) $T \in U$ (i) $T \not\subseteq R$.

26. Para A, B e C conjuntos arbitrários, indique quais as afirmações verdadeiras.

(a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$ (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(c) $\{\emptyset\} \subseteq A$ (d) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

(e) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \not\subseteq C$ (f) Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$ então $A \notin C$.

27. Para $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 4, 7\}$, $C = \{x;\ x \in \mathbb{Z}$ e $2 \leq x < 5\}$ subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ determine:

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap C$ (c) $A - B$

(d) $S - A$ (e) $A - S$ (f) $(A \cap B)^c$

(g) $(B - A)^c \cap (A - B)$ (h) $(C \cap B) \cup A^c$ (i) $(C^c \cup B)^c$.

28. Sendo A e B subconjuntos arbitrários de um conjunto X, indique as igualdades verdadeiras.

(a) $A \cup A = A$ (b) $B \cap B = B$

(c) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ (d) $(A^c)^c = A$

(e) $A - B = (B - A)^c$ (f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

(g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A = B^c$ (h) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 Folha 3

CAPÍTULO I: Fundamentos

29. Para cada uma das seguintes proposições, indique condições a impor aos conjuntos A e B para que as proposições sejam verdadeiras.
(a) $A \cup B = A$ (b) $A \cup \emptyset = \emptyset$ (c) $A \cap B = A$ (d) $B - A = \emptyset$ (e) $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$.

30. Mostre que para conjuntos arbitrários A, B e C se tem:
    (a) Se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$ então $A \subseteq B \cap C$.
    (b) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ também $A \cup B \subseteq C$.

31. Para A e B subconjuntos arbitrários de X, prove que $A \subseteq B$ se e só se $X \setminus B \subseteq X \setminus A$.

32. Prove ou refute que, sendo A, B e C subconjuntos arbitrários de X, se verificam as seguintes propriedades:
(a) $A - (B - C) = (A - B) - C$; (b) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$;
(c) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$; (d) $(A - B)^c = A^c - B^c$;
(e) $A \cup (B - A) = A \cup B$; (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
(g) $A - B = A \cap B^c$; (h) $A \cup B = A \cup (B \cap C)$ se e só se $B \subseteq C$.

*33. Considere a operação Δ (diferença simétrica) definida, entre subconjuntos de um conjunto X, por $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que, para subconjuntos arbitrários A, B e C de X, se tem:
(a) $A \Delta \emptyset = A$; (b) $A \Delta B = B \Delta A$;
(c) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$; (d) $A \Delta B = A \Delta C$ se e só se $B = C$.

34. Sejam A e B conjuntos arbitrários.
    (a) Prove que, se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
    (b) Prove que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
    (c) Quando é que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?

35. Sejam A, B, C e D conjuntos arbitrários. Prove ou refute as seguintes afirmações:
(a) $A \times B = B \times A$; (b) $A \subseteq C$, $B \subseteq D \Leftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$;
(c) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$; (d) $(A \times C) \cup (B \times D) = (A \cup B) \times (C \cup D)$.

36. Quando é que, para A e B subconjuntos de um conjunto X, se tem $A^c \times B^c = (A \times B)^c$?

37. Determine x, y e z tais que:
(a) $((x, y + 2), z + 3) = ((3, 5), 6)$; (b) $\{x, y + 2, z + 3\} = \{3, 5, 6\}$.

38. Sejam A e B conjuntos arbitrários, x e a elementos de A e y e b elementos de B. Prove que $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{b, a\}\}$ se e só se $(x, y) = (a, b)$.

39. Considere a função $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & m\times n \end{array}$.

   (a) Verifique se a função f é injectiva.

   (b) Verifique se a função f é sobrejectiva. É bijectiva?

   (c) Calcule $f(A)$, quando:

      i. $A = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\, n+m \leq 5\}$; ii. $A = \{2\}\times\mathbb{N}$;

      iii. $A = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\,;\, n \text{ e } m \text{ pares}\}$.

   (d) Calcule $f^{-1}(B)$, quando:

      i. $B = \{1,2,3,4\}$; ii. $B = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \text{ é par}\}$; iii. $B = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \text{ é ímpar}\}$.

40. Sejam $f : X \to Y$ uma função e A e B subconjuntos de X. Prove que:

   (a) $f(A-B) \supseteq f(A) - f(B)$;

   (b) Se f é injectiva, então $f(A-B) = f(A) - f(B)$;

   (c) f é injectiva se e só se $f(X-C) = f(X) - f(C)$ para qualquer $C \in \mathcal{P}(X)$.

41. Dada uma função $f : X \to Y$, prove que:

   (a) $\forall A \subseteq X \;\; A \subseteq f^{-1}(f(A))$; (b) f é injectiva $\Leftrightarrow\; \forall A \subseteq X \;\; A = f^{-1}(f(A))$;

   (c) $\forall B \subseteq Y \;\; f(f^{-1}(B)) \subseteq B$; (d) f é sobrejectiva $\Leftrightarrow\; \forall B \subseteq Y \;\; f(f^{-1}(B)) = B$;

   (e) $\forall B_1, B_2 \subseteq Y \;\; f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

42. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções. Prove que:

   (a) Se f e g são injectivas, então $g \circ f$ é injectiva.

   (b) Se f e g são sobrejectivas, então $g \circ f$ é sobrejectiva.

   (c) Se $g \circ f$ é injectiva, então f é injectiva.

   (d) Se $g \circ f$ é sobrejectiva, então g é sobrejectiva.

43. Entre as funções seguintes, indique as que são injectivas, sobrejectivas e bijectivas. Quando for possível, indique uma inversa à esquerda, uma inversa à direita ou a inversa para a função dada.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1$; (b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = \frac{1}{x}$;

   (c) $h : \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $h(z,n) = \frac{z}{n+1}$; (d) $f : \{1,2,3\} \to \{p,q,r\}$, $G(f) = \{(1,q),(2,r),(3,p)\}$;

   (e) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2^x$; (f) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = (y+1, x+1)$.

44. Denotando por $\mathcal{F}(X;Y)$ o conjunto das funções de X em Y, dados conjuntos X, Y e Z, estabeleça uma bijecção entre os conjuntos $\mathcal{F}(X\times Y;Z)$ e $\mathcal{F}(X;\mathcal{F}(Y;Z))$.

CAPÍTULO I: Fundamentos

45. Prove que, se $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto X e $(B_\mu)_{\mu\in M}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto Y, então:

(a) $X\setminus(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in L}(X\setminus A_\lambda)$;

(b) $X\setminus(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in L}(X\setminus A_\lambda)$;

(c) $(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda)\cap(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu)=\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cap B_\mu)$;

(d) $(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda)\cup(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu)=\bigcap_{(\lambda,\mu)\in L\times M}(A_\lambda\cup B_\mu)$.

46. Demonstre que, se $f:X\to Y$ é uma função e $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ e $(B_\mu)_{\mu\in M}$ são famílias de subconjuntos de X e Y, respectivamente, então:

i. $f(\bigcup A_\lambda)=\bigcup f(A_\lambda)$;

ii. $f(\bigcap A_\lambda)\subseteq\bigcap f(A_\lambda)$;

iii. $f^{-1}(\bigcup B_\mu)=\bigcup f^{-1}(B_\mu)$;

iv. $f^{-1}(\bigcap B_\mu)=\bigcap f^{-1}(B_\mu)$.

*47. Sendo $(A_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ uma família arbitrária de conjuntos com índices em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, verifique se é sempre verdade que $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right)=\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$.

48. Mostre que $\bigcup_{\lambda\in L}\mathcal{P}(A_\lambda)\subseteq\mathcal{P}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\Big)$ e que $\bigcap_{\lambda\in L}\mathcal{P}(A_\lambda)=\mathcal{P}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\Big)$, onde $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto X, e apresente um exemplo em que a primeira inclusão seja estrita.

49. (a) Determine, se possível, uma extensão sobrejectiva para a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$

(b) Determine, se possível, uma extensão bijectiva para a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & \frac{2}{3}x. \end{array}$

(c) Prove que toda a função é a composta, por esta ordem, de uma função sobrejectiva com uma função injectiva.

*(d) Prove que toda a função é a composta, por esta ordem, de uma função injectiva com uma função sobrejectiva.

*(e) Prove que toda a função injectiva tem uma extensão bijectiva.

50. Indique quais das seguintes relações são gráficos de funções, indicando nesse caso o seu domínio.

(a) $\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3)\}$;

(b) $\{(1,2),(2,2),(2,3),(4,3)\}$;

(c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x^2+y=1\}$;

(d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x+y^2=1\}$.

51. Teste a reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade da relação ρ em X, quando:

   (a) $X = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x + y$ for um número par;

   (b) $X = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se xy for um número ímpar;

   (c) $X = \mathbb{N}$, $x\rho y$ se $x = y^2$;

   (d) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x, y)\rho(x', y')$ se $x + y' = x' + y$;

   (e) X conjunto das linhas do plano e $x\rho y$ se x for paralela a y ou x coincidir com y;

   (f) $X = \{1, 2, 3\}$ e $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (1, 3)\}$.

52. Seja $f : X \to Y$ uma função.

   (a) Prove que ρ, definida em X por $x\rho y$ se $f(x) = f(y)$, é uma relação de equivalência. (ρ diz-se a equivalência núcleo de f.)

   (b) Para $X = Y = \mathbb{Z}$ e $f(x) = 3x^2$ determine a classe de equivalência do elemento 4 pela relação de equivalência núcleo de f.

53. Considere a relação de inclusão $\subseteq$ no conjunto das partes do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$.

   (a) Mostre que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, mas não uma cadeia.

   (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, majorantes e supremo dos conjuntos:

      i. $A = \{S \subseteq X\,;\, 1 \in S\}$;

      ii. $B = \{S \subseteq X\,;\, 2 \notin S\}$;

      iii. $C = \{S \subseteq X\,;\, S$ é um conjunto singular$\}$.

54. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, onde X é um conjunto arbitrário.

   (a) Indique, se existirem, o elemento mínimo e o elemento máximo de $\mathcal{P}(X)$.

   (b) Para que conjuntos X é que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é totalmente ordenado?

   (c) Sejam A e B subconjuntos arbitrários de X. Prove que o ínfimo e o supremo de $\{A, B\}$ existem. Indique esses elementos.

55. Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ considere a relação binária ρ definida por $(a, b)\rho(c, d)$ se $a < c$ ou $a = c$ e $b \leq d$.

   (a) Mostre que ρ é uma relação de ordem em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. É total?

   (b) Determine, caso existam, os minorantes, mínimo, ínfimo, majorantes, máximo, supremo, dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

      i. $X = \{1\} \times \mathbb{N}$;   ii. $Y = \mathbb{N} \times \{1\}$;   iii. $Z = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,;\, n + m = 10\}$.

56. Seja ρ_1 uma relação binária em X reflexiva e transitiva.

   (a) Mostre que a relação ρ_2, definida por $a\rho_2 b$ se e só se $a\rho_1 b$ e $b\rho_1 a$, é uma relação de equivalência.

   *(b) Denotando por [a] a classe de equivalência $\{a' \in X;\ a\rho_2 a'\}$, mostre que a relação ρ, definida por $[a]\rho[b]$ se e só se $a\rho_1 b$, é uma relação de ordem no conjunto das classes de equivalência definidas em X por ρ_2.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 Folha 5

CAPÍTULO I: Fundamentos

57. Prove que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é limitado se e só se $\exists b \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \in A \ |x| \leq b$.

58. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e α um majorante de A.
    (a) Mostre que as seguintes afirmações se equivalem:
        (i) α é o supremo de A;
        (ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ : \ x > \alpha - \varepsilon$;
    (b) Formule a correspondente caracterização de ínfimo de A.

59. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.
    (a) Suponha que $A \subseteq B$. Prove que:
        i. Se α é um majorante de B, também é um majorante de A.
        ii. Se A for não vazio e B for limitado superiormente, então $\sup A \leq \sup B$.
    (b) Mostre que, se α é um majorante de A e β é um majorante de B, então $\max\{\alpha, \beta\}$ é um majorante de $A \cup B$ e $\min\{\alpha, \beta\}$ é um majorante de $A \cap B$.
    (c) Se A e B forem não vazios e limitados superiormente, então
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

60. Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que: $\forall x \in A \ \forall y \in B \ x < y$. Prove que:
    (a) $\sup A \leq \inf B$;
    (b) pode ocorrer $\sup A = \inf B$;
    (c) $\sup A = \inf B$ se e só se $\forall \delta > 0 \ \exists x \in A \ \exists y \in B \ : \ x + \delta > y$.

61. Seja $-A = \{-x; \ x \in A\}$, onde A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Mostre que $\inf(-A) = -\sup A$.

62. Seja $A \cdot B = \{ab; \ a \in A \text{ e } b \in B\}$, onde A e B são conjuntos limitados de números reais positivos. Mostre que $\sup A \cdot B = (\sup A)(\sup B)$. O que aconteceria no caso de A e B conterem números negativos?

63. Sejam $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ e $(y_\lambda)_{\lambda \in L}$ famílias limitadas de números reais positivos indexadas por L.
    (a) Mostre que $\sup\{x_\lambda y_\lambda; \lambda \in L\} \leq (\sup\{x_\lambda; \lambda \in L\})(\sup\{y_\lambda; \lambda \in L\})$ e apresente um exemplo em que a desigualdade anterior seja estrita.
    (b) Mostre que $\sup\{x_\lambda^2; \lambda \in L\} = (\sup\{x_\lambda; \lambda \in L\})^2$.

*64. (a) Prove que todo o subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é reunião de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

(b) Prove que todo o subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é reunião de uma família numerável de intervalos abertos.

(c) Mostre que se I é um intervalo aberto então não existem conjuntos abertos disjuntos e não vazios, A_1 e A_2, tais que $I = A_1 \cup A_2$.

65. (a) Prove que a intersecção de uma família finita de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

(b) Dê exemplos de famílias de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ cuja intersecção seja, respectivamente,

i. um conjunto aberto;

ii. um conjunto fechado que não seja aberto;

iii. um conjunto que não seja aberto nem fechado.

66. Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos e/ou fechados:

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{R}$ (e) $\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$ (f) $\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

(g) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$ (h) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1]$ (i) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.

67. Determine o interior e o fecho de cada um dos conjuntos do exercício anterior.

68. Mostre que, para X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, se tem,

(a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

(b) $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$;

(c) nalguns casos, $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$;

69. Verifique que, para A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$,

(a) se A é aberto então A é vazio ou A não é numerável;

(b) se A é aberto e B é finito então $A - B$ é aberto;

(c) se A é aberto e B é numerável infinito então $A - B$ pode ser ou não ser aberto.

70. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $\mathbb{R} \setminus \text{int}(A) = \overline{\mathbb{R} \setminus A}$ e $\mathbb{R} \setminus \overline{A} = \text{int}(\mathbb{R} \setminus A)$.

(b) Mostre que, em alguns casos, $\text{int}(\overline{A}) \not\subseteq \overline{\text{int}(A)}$ e $\overline{\text{int}(B)} \not\subseteq \text{int}(\overline{B})$.

*(c) Quando é que $\overline{\text{int}(A)} = \text{int}(\overline{A})$?

*71. Mostre que uma família numerável de intervalos fechados e limitados não vazios, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que verifique $\forall n \in \mathbb{N} \;\; F_{n+1} \subseteq F_n$, tem intersecção não vazia.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 Folha 6

CAPÍTULO I: Fundamentos

73. Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, A diz-se *vizinhança de x* se x for ponto interior de A. Mostre que:

   (a) A intersecção de duas vizinhanças de x ainda é uma vizinhança de x.

   (b) Se A for vizinhança de x e $A \subseteq B$, então B é vizinhança de x.

   (c) Se x e y são números reais distintos, então existem uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

   (d) Se $\alpha = \sup A$, então A e $\mathbb{R} \setminus A$ não são vizinhanças de α.

74. Para $A \subseteq \mathbb{R}$, mostre que:

   (a) A é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos;

   (b) um ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto aderente de A se e só se toda a vizinhança de x intersecta A.

75. Determine o conjunto dos pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   (a) $\mathbb{Z}$ (b) $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $]0,1]$.

76. Dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$:

   (a) infinito sem pontos de acumulação;

   (b) com exactamente um ponto de acumulação;

   (c) numerável com um conjunto de pontos de acumulação não numerável;

   *(d) com um conjunto de pontos de acumulação infinito numerável.

77. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) $\overline{X} = X \cup X'$;

   (b) X é fechado se e só se contém todos os seus pontos de acumulação;

   *(c) se X não tem pontos de acumulação então X é numerável.
   (Sugestão: verificar que X é igual a qualquer conjunto numerável E tal que $E \subseteq X \subseteq \overline{E}$).

CAPÍTULO II: Limites

78. Prove que cada uma das sucessões cujo termo geral se indica a seguir é limitada e estude a monotonia dessas sucessões.

(a) $x_n = \dfrac{2n}{3n+16}$; (b) $x_n = \dfrac{n}{n^2+2}$;

(c) $x_n = \dfrac{100}{n} + 2(-1)^n$; (d) $x_n = \begin{cases} 10 & \text{se } n = 1 \\ \frac{(-1)^n n - 8}{3n-2} & \text{se } n \neq 1; \end{cases}$

(e) $x_n = \dfrac{2004^n}{n!}$; (f) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ n\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

79. Verifique que as seguintes sucessões não são limitadas e, em cada caso, determine, se possível, uma subsucessão que seja limitada:

(a) $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $((-1)^n n^2 + 2n)_{n\in\mathbb{N}}$; *(c) $\sqrt[n]{n!}$; (d) $n\cos(\frac{\pi n}{4})$.

80. Sejam X um subconjunto não vazio limitado de $\mathbb{R}$ e s o seu supremo. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para s.

81. (a) Sejam X um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão com valores em X que converge para a.
 (b) Conclua que qualquer número real é limite de uma sucessão de números racionais e limite de uma sucessão de números irracionais.

82. Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

 (a) Mostre que (x_n) é uma sucessão crescente.
 (b) Prove que, para todo o número natural n, $x_n \leq 3$. (Sugestão: Mostre que $n! \geq 2^{n-1}$).
 (c) Será (x_n) uma sucessão convergente? Justifique.

*83. Existirá alguma família de intervalos abertos cuja união contenha $\mathbb{Q}$ mas não contenha $\mathbb{R}$? (Sugestão: considerar uma família numerável de intervalos com largura $\frac{1}{2^n}$ e consultar *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima).

84. Mostre que se a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente então a sucessão $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é também convergente. Será que a recíproca é sempre verdadeira?

85. Usando a definição de limite, verifique as seguintes igualdades:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}+n}{2-n^2} = 0$; (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{\pi - n} = -2$;

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin(\frac{n\pi}{3})}{2n} = \frac{1}{2}$; (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1000}{n^2} = 0$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 Folha 7

CAPÍTULO II: Limites

86. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:
    (a) Toda a sucessão convergente é limitada.
    (b) Toda a sucessão limitada é convergente.
    (c) Toda a sucessão convergente é monótona.
    (d) Toda a sucessão de termos positivos que tende para 0 é monótona decrescente (a partir de certa ordem).
    (e) Para que uma sucessão seja limitada basta que possua uma subsucessão limitada.
    (f) Uma sucessão monótona é convergente se e só se possui uma subsucessão limitada.
    (g) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < 0$, então tem-se $u_n < 0$ a partir de uma certa ordem.
    (h) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq 0$, então tem-se $u_n \leq 0$ a partir de uma certa ordem.
    (i) Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente e se $u_n < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < 0$.
    (j) Se uma sucessão convergente é soma de duas sucessões, então cada uma das sucessões parcelas também é convergente.
87. Verifique as igualdades do problema 85 utilizando álgebra dos limites.
88. Mostre, usando a definição, que:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-n^2) = -\infty$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+(-1)^n n) = +\infty$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+1)^n}{n} = +\infty$.
89. Indique, quanto à convergência, o comportamento da sucessão $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $a \in \mathbb{R}$.
90. Diga, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:
    (a) Toda a sucessão superiormente ilimitada tende para $+\infty$.
    (b) Toda a sucessão que tende para $+\infty$ é crescente (a partir de uma certa ordem).
    (c) Toda a sucessão monótona e não limitada inferiormente tende para $-\infty$.
    (d) Toda a sucessão crescente tende para $+\infty$.
91. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as subsucessões definidas por $u_n = x_{2n}$ e $v_n = x_{2n+3}$. Mostre que:
    (a) Se $a \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$, então também $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
    (b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, então também $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
92. Estude a convergência das sucessões de termo geral

    (a) $u_n = \begin{cases} 1-\frac{4}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n^2-3n-2}{n^2+n} & \text{se } n \text{ par;} \end{cases}$ (b) $u_n = \begin{cases} (-1)^n+\frac{2}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \cos((n-1)\pi) & \text{se } n \text{ par;} \end{cases}$

    (c) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 3k,\ k\in\mathbb{N} \\ (-1)^n\frac{1}{n} & \text{se } n = 3k+1,\ k\in\mathbb{N} \\ (\frac{1}{\pi})^n & \text{se } n = 3k+2,\ k\in\mathbb{N}; \end{cases}$ (d) $u_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{\sin n}{n} & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$

93. Usando o Teorema das Sucessões Enquadradas, determine o limite das sucessões:

(a) $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $u_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 7^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2}$, $n \in \mathbb{N}$;

(d) $u_n = \displaystyle\sum_{i=4}^{n+6} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+i}}$, $n \in \mathbb{N}$.

94. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+(-3n)+1}{\sqrt{n^4+1}}$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)} - n$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n-1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+5}-\sqrt{4n+1}}$ $(n \geq 3)$;

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2 - 3\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n^3}-n^2}$ $(n \geq 2)$;

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n+19)}{\log n}$ $(n \geq 2)$;

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$;

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3n}\right)^3$;

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -n(16+\cos(\log n))$;

(j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1+\sin^2 n)$;

(k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3\sin^2\frac{1}{n}$;

(l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$.

95. Indique sucessões (x_n) e (y_n) de números reais que tendam para $+\infty$ e tais que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a$, sendo a um número real qualquer, previamente fixado;

(c) $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada mas não diverge para ∞.

96. Dê exemplos de sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tendam para $+\infty$ e 0, respectivamente, e tais que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$, sem ser $+\infty$ e $-\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n y_n = a$, sendo a um número real qualquer, previamente dado;

(c) $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente mas limitada.

97. (a) Mostre que se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(b) Se $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, encontre os primeiros oito termos da sucessão (a_n).

(c) Use a alínea (a) para provar que (a_n) é convergente.

98. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e seja $c \in]0,1[$. Prove que

(a) Se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $0 < \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c$ então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

*(b) Se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. (Sugestão: provar que (x_n) satisfaz o Critério de Convergência de Cauchy).

CAPÍTULO II: Limites

99. Foram investidos 1000 euros a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente.
    (a) Indique o valor v_n do investimento ao fim de n anos.
    (b) Verifique se a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

100. Sejam a e b números positivos, com $a > b$. Denotemos por a_1 a sua média aritmética, e por b_1 a sua média geométrica; isto é,
$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$
Iterando este processo, obtemos duas sucessões, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sendo, para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$
    (a) Use o Princípio da Indução Matemática para provar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$
    (b) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
    (A este limite Gauss chamou *média aritmética-geométrica* dos números a e b.)

101. Esboce o gráfico das funções seguintes e indique o seu domínio e o seu contradomínio.
    (a) $a(x) = 1 + |x|$ (b) $b(x) = |\sin x|$ (c) $c(x) = \sin |x|$
    (d) $d(x) = \begin{cases} |\log|x|| & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$ (e) $e(x) = \begin{cases} -x-5 & \text{se } x \geq 1 \\ -1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$
    (f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$ (g) $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
    (h) $h(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa a *característica* de x, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x.

102. Indique a expressão da função cujo gráfico é uma recta que passa nos pontos de coordenadas $(1, 3)$ e $(3, 4)$.

103. Sendo $f(x) = kx^2 + 5x + k$, determine k de modo que $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

104. Sendo $f(x) = kx^2 + 3x + 2k + 1$, determine k de modo que $\sqrt{f(x) + 2}$ tenha domínio $\mathbb{R}$.

105. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c constantes reais. Analise a representação gráfica de f, consoante o valor dos parâmetros a, b e c.

106. Determine o domínio das seguintes funções:
    (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ (b) $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ (c) $h(x) = \sqrt{-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
    (d) $l(x) = \log\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x-1}$ (e) $o(x) = e^{\sqrt{x+1}} - \sin x$ (f) $p(x) = \log(1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

107. Sendo $f : A \to B$, identifique as propriedades descritas pelas condições:

(a) $(\forall x \in A\ \exists y \in B\ :\ f(x) = y)\ \wedge\ (\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 = x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) = f(x_2))$.

(b) $(\forall x_1, x_2 \in A\ x_1 \neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2))\ \wedge\ (\forall y \in B\ \exists x \in A\ :\ f(x) = y)$.

(c) $(\forall x \in A)\ (-x \in A\ \wedge\ f(-x) = f(x))$.

(d) $(\forall x \in A)\ (-x \in A\ \wedge\ f(-x) = -f(x))$.

108. Verifique quais das seguintes funções são pares e quais são ímpares:

(a) $f(x) = \log \dfrac{2+x}{2-x}$; (b) $g(x) = \dfrac{2}{3}(e^x + e^{-x})$;

(c) $h(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2}$; (d) $l(x) = \sin^2 x - \cos(x+\pi)$.

109. Diga quais dos seguintes conjuntos são gráficos de funções e, para esses casos, indique quais das funções são injectivas, pares ou ímpares.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 = 4\}$; (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 \leq 3\ \wedge\ y = -\sqrt{3 - x^2}\}$;

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy = 1\}$; (d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ |x| + |y| = 1\}$;

(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 4\}$; (f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 4\}$.

110. Determine em que casos a função é invertível e, quando o for, determine a sua inversa e faça a representação gráfica de ambas as funções.

(a) $f(x) = \sin x$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$; (c) $h(x) = x|x|$;

(d) $i(x) = 3x^2 - 2$; (e) $j(x) = e^{x+1}$; (f) $l(x) = \log(x^3)$.

111. Considere as funções:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Indique o domínio e a expressão analítica das funções

(a) $h = f + g$, (b) $j = f \cdot g$, (c) $k = f/g$, (d) $l = g/f$, (e) $m = \sqrt{f}$.

112. Determine o domínio e a expressão analítica de $g \circ f$, sendo:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

(b) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \sqrt{2x+3}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = x^2 - 1$;

113. Demonstre, usando a definição, que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{1}{2}(3x - 2) = 5$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.