Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 Folha 1

CAPÍTULO I: Fundamentos

1. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?
   (a) 8 é par ou 6 é ímpar. (b) 8 é par e 6 é ímpar.
   (c) 8 é ímpar e 6 é ímpar. (d) 8 é ímpar ou 6 é ímpar.

2. Quais das seguintes frases são a negação à proposição apresentada?

   Proposição 1: Os pepinos são verdes e têm sementes.

   (a) Os pepinos não são verdes e não têm sementes.
   (b) Os pepinos não são verdes ou não têm sementes.
   (c) Os pepinos são verdes e não têm sementes.

   Proposição 2: Tem-se $2 < 7$ e 3 é ímpar.

   (a) Tem-se $2 > 7$ e 3 é par. (b) Tem-se $2 \geq 7$ e 3 é par.
   (c) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é ímpar. (d) Tem-se $2 \geq 7$ ou 3 é par.

3. Construa e compare as tabelas de verdade para as seguintes expressões:
   (a) $p \vee \sim p$ (b) $p \wedge \sim p$ (c) $\sim (p \wedge q)$
   (d) $\sim p \vee \sim q$ (e) $p \wedge (q \vee r)$ (f) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

4. Qual o valor de verdade de cada uma das seguintes proposições?
   (a) Se 8 for ímpar então 6 é ímpar. (b) Se 8 for par então 6 é ímpar.
   (c) Se 8 for ímpar então 6 é par. (d) Se 8 for ímpar e 6 for par então $8 < 6$.

5. Escreva as proposições recíproca, negação e contra-recíproca de cada uma das seguintes proposições:
   (a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (c) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

6. Escreva o recíproco, o contra-recíproco e a negação das seguintes frases:

   (a) Se chove então há nuvens no céu.
   (b) Se 229 é primo então Roma é a capital de França.

7. Escreva cada uma das frases na forma de implicação $p \Rightarrow q$.

   (a) Se comeres demasiado bolo ficas mal disposto.
   (b) Continua a comer bolo e arrepender-te-ás.
   (c) Sai ou chamo a polícia.
   (d) Vou-me embora se não pararem de falar.

8. Determine o antecedente e o consequente de cada uma das seguintes proposições:

   (a) Um aumento significativo no poder dos computadores é uma condição necessária para futuros avanços tecnológicos.

   (b) Erros serão introduzidos se efectuarmos uma modificação neste programa.

   (c) Para poupar combustível é necessário instalar um bom isolamento térmico, assim como janelas duplas.

9. Construa tabelas de verdade para as seguintes proposições:

   (a) $p \wedge \sim(\sim p \vee \sim q)$
   (b) $p \wedge q \Rightarrow \sim p$
   (c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)]$
   (d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
   (e) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim q \vee \sim p$
   (f) $(p \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge q)$
   (g) $((p \vee q) \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p \vee r$
   (h) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
   (i) $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p$
   (j) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
   (l) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$
   (m) $\sim ((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r)$
   (n) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

10. Sem construir tabelas de verdade verifique que as seguintes expressões são tautologias:

    (a) $(p \vee \sim r) \wedge [(p \vee \sim r) \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (q \wedge r)$

    (b) $[(p \vee \sim r) \wedge (q \Rightarrow (\sim p \wedge r))] \Rightarrow \sim q$

*11. Prove que uma expressão não contendo conectivos lógicos além de $\Leftrightarrow$ é uma tautologia se e só se cada variável (letra) aparece um número par de vezes.

12. Num certo país cada habitante é um amante da verdade ou é um amante da mentira e, como tal, diz sempre a verdade ou diz sempre a mentira. Ao viajar neste país encontrei o Pedro e o Luís. O Pedro disse-me: “Se eu for um amante da verdade então o Luís é um amante da verdade.”Será Pedro um amante da verdade ou da mentira? E o Luís?

13. (a) Sendo $p \Leftrightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?

    (b) Supondo agora que $p \Leftrightarrow q$ é falso, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $p \Leftrightarrow \sim q$ e $\sim p \Leftrightarrow q$?

    (c) Sendo $p \Rightarrow q$ uma proposição verdadeira, o que pode afirmar relativamente ao valor de verdade de $\sim p \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$?

*14. (a) Noutro país há, além dos amantes da verdade e da mentira, pessoas normais que mentem só de vez em quando. Ao encontrar um grupo com uma pessoa de cada tipo dizem-me:

    António: *Sou normal.* Bruno: *Isso é verdade.* Cristiano: *Eu não sou normal.*

    Que podemos concluir?

    (b) No mesmo país encontro o Diogo, que diz ao Eugénio: *Tu dizes mais vezes a verdade do que eu*, que responde: *Isso não é verdade.* Podemos concluir alguma coisa?

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Infinitesimal I

Ano lectivo 2010/11 Folha 2

CAPÍTULO I: Fundamentos

16. O Artur, o Bernardo e o Carlos, suspeitos de terem assaltado uma loja de chocolates, fazem os seguintes depoimentos:

    Artur: "Bernardo é culpado, mas Carlos é inocente".
    Bernardo: "Se Artur é culpado então Carlos é culpado".
    Carlos: "Estou inocente, mas um dos outros dois é culpado".

    (a) Os três depoimentos são compatíveis?

    (b) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

    (c) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?

    *(d) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentira, quem é inocente e quem é culpado?

17. De entre as seguintes frases assinale as que são proposições atribuindo-lhe o respectivo valor de verdade.

    (a) Para todo o x real, $x^2 = x$.
    (b) Para exactamente um x real, $x^2 = x$.
    (c) Para algum $x \in \mathbb{R}$ verifica-se $x^2 = x$.
    (d) $x^2 = x$.
    (e) $xy = xz$ implica $y = z$.
    (f) Para x, y, z reais $xy = xz$ implica $y = z$.

18. Para cada uma das expressões seguintes determine uma interpretação onde a proposição seja verdadeira e outra onde seja falsa.

    (a) $(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \Rightarrow q(y,x))$
    (b) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow (\exists y)q(x,y))$.

19. (a) Qual destas proposições é a negação de: "Algumas pessoas gostam de matemática"?

    i. Algumas pessoas não gostam de matemática.
    ii. Todas as pessoas gostam de matemática.
    iii. Ninguém gosta de matemática.

    (b) Qual destas proposições é a negação de: "Todas as pessoas gostam de gelados"?

    i. Ninguém gosta de gelados.
    ii. Todas as pessoas não gostam de gelados.
    iii. Existe alguém que não gosta de gelados.

20. Determine a negação de cada uma das seguintes expressões numa forma que não contenha o conectivo $\sim$ como conectivo principal.

    (a) $(\forall x)(p(x) \vee \sim p(x))$
    (b) $(\exists x)(p(x) \Rightarrow (q(x) \vee r(x)))$
    (c) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \Leftrightarrow p(y,x))$
    (d) $(\exists y)(\forall x)(p(x,y) \Rightarrow (q(x) \Rightarrow r(y)))$.

21. Escreva expressões equivalentes às do exercício anterior utilizando apenas o quantificador $\exists$ e os conectivos lógicos $\sim$ e $\vee$.

22. Para cada um dos seguintes pares de expressões, indique qual delas é consequência da outra e apresente, se possível, uma interpretação onde sejam não equivalentes:

    (a) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ e $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$

    (b) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ e $((\exists x)p(x)) \wedge ((\exists x)q(x))$

    (c) $((\forall x)p(x)) \wedge ((\forall x)q(x))$ e $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$

    (d) $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x)$ e $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$.

23. Apresente, se possível, uma interpretação onde sejam falsas as seguintes expressões:

    (a) $(\forall x)p(x) \Leftrightarrow \sim (\exists x)(\sim p(x))$

    (b) $((\forall x)p(x)) \vee ((\forall x)q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$

    (c) $[(\exists x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)p(x)] \Rightarrow (\exists x)q(x)$

    (d) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(y) \Rightarrow q(x,y)) \Rightarrow (p(y) \Rightarrow (\forall x)q(x,y))]$

    *(e) $(\forall z)(\forall y)[(\forall x)(p(x,y) \Rightarrow q(x,y)) \Rightarrow (p(z,y) \Rightarrow (\forall x)q(x,y))]$.

24. Verifique que

    (a) $\{x \in \mathbb{N};\ x^2 < 15\} = \{x \in \mathbb{N};\ 2x < 7\}$

    (b) $\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 = 2\} = \{x \in A;\ x$ é tigre e x é cor-de-rosa$\}$,

    onde A é o conjunto dos animais terrestres conhecidos até 30/09/2010.

25. Considere os conjuntos

    $R = \{1, 3, \pi, 4.1, 9, 10\}$ $S = \{\{1\}, 3, 9, 10\}$ $T = \{1, 3, \pi\}$ $U = \{\{1, 3, \pi\}, 1\}$.

    Indique, de entre as seguintes proposições, as que são falsas (justifique a sua resposta).

    (a) $1 \in R$ (b) $1 \in S$ (c) $T \subseteq R$

    (d) $S \subseteq R$ (e) $T \subseteq U$ (f) $\emptyset \subseteq S$

    (g) $\{1\} \subseteq S$ (h) $T \in U$ (i) $T \not\subseteq R$.

26. Para A, B e C conjuntos arbitrários, indique quais as afirmações verdadeiras.

    (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$ (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

    (c) $\{\emptyset\} \subseteq A$ (d) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

    (e) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \not\subseteq C$ (f) Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$ então $A \notin C$.

27. Para $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 4, 7\}$, $C = \{x;\ x \in \mathbb{Z}$ e $2 \leq x < 5\}$ subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ determine:

    (a) $A \cup B$ (b) $A \cap C$ (c) $A - B$

    (d) $S - A$ (e) $A - S$ (f) $(A \cap B)^c$

    (g) $(B - A)^c \cap (A - B)$ (h) $(C \cap B) \cup A^c$ (i) $(C^c \cup B)^c$.

28. Sendo A e B subconjuntos arbitrários de um conjunto X, indique as igualdades verdadeiras.

    (a) $A \cup A = A$ (b) $B \cap B = B$

    (c) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ (d) $(A^c)^c = A$

    (e) $A - B = (B - A)^c$ (f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

    (g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A = B^c$ (h) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.