Folhas de Exercícios [1]

1. (a) Verifique se d é uma métrica em $\mathbb{R}$:

   i.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1+|x-y| & \text{se } x\neq y \end{cases} \end{array}$$

   ii.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} |x|+|y| & \text{se } x\neq y \\ 0 & \text{se } x=y \end{cases} \end{array}$$

   iii.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x^2-y^2| \end{array}$$

   iv.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x^3-y^3|. \end{array}$$

   (b) Descreva as bolas abertas para cada uma das métricas da alínea anterior.

2. Sejam X um conjunto e d' uma métrica em X. Verifique quais das funções $d : X\times X\to\mathbb{R}$ definidas em seguida são métricas em X:

   (a) $d(x,y) = k\,d'(x,y)$ para algum número real não negativo k;

   (b) $d(x,y) = \min\{1, d'(x,y)\}$;

   (c) $d(x,y) = \frac{d'(x,y)}{1+d'(x,y)}$;

   (d) $d(x,y) = (d'(x,y))^2$.

3. Sejam (X,d) um espaço métrico, x um ponto de X e A e B subconjuntos não vazios de X. Definimos a distância do ponto x ao subconjunto A como o número real

   $$d(x,A) := \inf_{a\in A} d(x,a),$$

   e a distância de A a B como o número real

   $$d(A,B) := \inf\{d(a,b)\,|\,a\in A,\, b\in B\}.$$

   Mostre que:

   (a) Para todo o par de pontos a,b e todo o subconjunto não vazio A de X,

   $$|d(a,A)-d(b,A)| \leq d(a,b).$$

[1] Observações:
– Sempre que nada for dito em contrário, consideraremos $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana.
– Assinalam-se com (*) os exercícios de resolução eventualmente mais elaborada.

(b) A função $d : \mathcal{P}_*(X) \times \mathcal{P}_*(X) \to \mathbb{R}$ definida acima (onde $\mathcal{P}_*(X)$ denota o conjunto dos subconjuntos não vazios de X) não é uma métrica em $\mathcal{P}_*(X)$.
(Analise a validade de cada um dos axiomas de métrica.)

4. No conjunto das funções reais contínuas definidas em $[0,1]$ considere as métricas ρ do supremo e σ do integral definidas na aula teórica.

   (a) Calcule, para cada uma dessas métricas, $d(\sin x, \cos x)$, $d(x^2, x)$ e $d(1-x, x^2)$.

   (b) Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ e $g(x) = x$. Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$ e a $B_1(g)$ para a métrica ρ.

   (c) Poderá dar uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções de $B_1(f)$ (ou de $B_1(g)$) para a métrica σ? Justifique.

5. No conjunto das funções reais e limitadas de domínio $[0,1[$ considere a métrica ρ do supremo. Considere as funções

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} g : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

   (a) Calcule $\rho(f,g)$. Qual a condição menos restrictiva que se deve impôr ao número real δ para que $g \in B_\delta(f)$?

   (b) Seja $F = [0,1[\times]-1,1[$. O gráfico de g está contido em F?

   (c) Compare, relativamente a funções limitadas $h : [0,1[\to \mathbb{R}$, as duas condições seguintes:

      i. $h \in B_1(f)$;

      ii. $Gr(h) \subseteq F$.

   (d) Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$.

6. Sejam (X,d) um espaço métrico e x e y elementos de X.

   (a) Prove que, se x e y forem distintos, existem bolas abertas disjuntas B e B' tais que $x \in B$ e $y \in B'$.

   (b) Sejam $x \neq y$ e $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(x,y)$. Mostre que as bolas abertas $B_r(x)$ e $B_s(y)$ são disjuntas.

   (c) Sejam r e s números reais positivos tais que $B_r(x) = B_s(y)$. Podemos então concluir que $x = y$ ou que $r = s$? Justifique a sua resposta.

7. Sejam (X,d) um espaço métrico e a um ponto de X. Mostre que:

   (a) $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$;

   (b) $\{a\} = \displaystyle\bigcap_{r>0} B_r(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a)$;

   (c) $B_r[a] = \displaystyle\bigcap_{s>r} B_s(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r+\frac{1}{n}}(a)$;

   (d) $B_r(a) = \displaystyle\bigcup_{0<s<r} B_s[a]$.

8. Dados um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) e $r > 0$ definimos
$$B_r(A) = \bigcup_{a \in A} B_r(a).$$
   (a) Mostre que, quaisquer que sejam $A, B \subseteq X$:
      i. $B_r(A \cap B) \subseteq B_r(A) \cap B_r(B)$;
      ii. $B_r(A \cup B) = B_r(A) \cup B_r(B)$.
   (b) Prove que, se x é um ponto de X e A é um subconjunto não vazio de X,
$$d(x, A) = \inf\{r > 0 \,|\, x \in B_r(A)\}.$$

9. Se (X, d) é um espaço métrico e $A \subseteq X$, chama-se diâmetro de A a
$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \,;\, x, y \in A\}$$
(que pertence a $[0, +\infty]$).
   (a) Em $\mathbb{R}^2$ calcule o diâmetro de
      i. $B_1(0, 0)$,
      ii. $]0, 1] \times]0, 1]$,

      para as métricas d_1, d_2 e d_∞ e para a métrica discreta (definidas na aula teórica).
      Conclua que o diâmetro de uma bola aberta pode não coincidir com o dobro do seu raio.
   (b) Prove que $\operatorname{diam}(A) \in \mathbb{R}$ se e só se A é limitado.
   (c) Mostre que, se A e B são subconjuntos limitados e não vazios de X, então
$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B).$$

10. Seja X um espaço vectorial real. X diz-se um espaço vectorial normado se em X estiver definida uma aplicação $\|.\| : X \to \mathbb{R}$, designada por norma, que verifique as seguintes condições para todos os $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

    N1) $\|x\| \geq 0$ e $(\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)$;
    N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
    N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   (a) Prove que todo o espaço vectorial normado é um espaço métrico com a métrica definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.
      (Sempre que nada for dito em contrário, consideraremos um espaço vectorial normado munido da métrica assim definida.)
   (b) Mostre que o recíproco do resultado da alínea anterior não se verifica em geral, exibindo um espaço métrico cuja métrica não seja induzida por nenhuma norma.
   (c) Seja X um espaço vectorial normado e d uma métrica em X. Prove que d é induzida por uma norma se e só se
$$(\forall x, y \in X)\ (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \ d(x + a, y + a) = d(x, y) \text{ e } \ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y).$$
   (d) Mostre que em todo o espaço vectorial normado não nulo o diâmetro de qualquer bola aberta é igual ao dobro do respectivo raio.

(e) Mostre que, se X é um espaço vectorial normado, $a \in X$ e $r > 0$, então

$$(\forall x \in X)\ \ d(x, B_r(a)) = 0 \ \Leftrightarrow\ x \in B_r[a].$$

(f) Dê um exemplo de um espaço métrico que não tenha esta propriedade.

11. Mostre que um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) é fechado se e só se

$$(\forall x \in X)\ \ x \in A \ \Leftrightarrow\ d(x, A) = 0.$$

12. Verifique quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos ou fechados:

    (a) $\mathbb{N}$;

    (b) $[1, 2[\cup]2, 3[$;

    (c) $\{0\} \cup \{x; x^2 > 2\}$;

    (d) $\mathbb{Q}$;

    (e) $[5, 7] \cup \{8\}$;

    (f) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

13. Verifique se os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$:

    (a) $]0, 1[\times]0, 1[$;

    (b) $[0, 1[\times]0, 1[$;

    (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq y\}$;

    (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}^2$.

14. (*) Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ o espaço métrico das funções contínuas e limitadas, de X em $\mathbb{R}$, munido da métrica do supremo. Considere o subconjunto

$$A = \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, \forall x \in X \ \ f(x) > 0\}$$

de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Mostre que:

    (a) se $X = [0, 1]$, então A é aberto.

    (b) se $X =]0, 1]$, então A não é aberto.

15. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 + |x| & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Note que esta função é descontínua para a métrica usual em $\mathbb{R}$. Verifique porém que, se d é a métrica definida no Exercício 1(a)i (pág.1), então a função $f : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

16. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual d_1 e a métrica d definida em 1(a)ii (pág.1). Verifique se alguma das funções $f, g : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ é contínua, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

17. Suponha que $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $a \in X$ tal que $f(a) > 0$. Mostre que
$$\exists\, r > 0 : \forall\, x \in B_r(a) \quad f(x) > 0.$$

18. Sejam $g, h : (X, d) \to (X', d')$ aplicações contínuas. Dado $a \in X$, suponha que toda a bola aberta de centro a contém um ponto x tal que $g(x) = h(x)$. Conclua que $g(a) = h(a)$.

    (Sugestão: Use o exercício anterior, definindo convenientemente a função f.)

19. (a) Mostre que num espaço vectorial normado duas bolas abertas (respectivamente fechadas) com o mesmo raio são isométricas.
    (b) Mostre que para espaços métricos em geral este resultado é falso.

20. Dada uma imersão isométrica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + a$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, ou $f(x) = -x + a$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Em particular, f é uma isometria.

21. Considere a projecção $\begin{array}{rcl} p : (\mathbb{R}^2, d_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |.|). \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$

    (a) Prove que p define, por restrição, uma isometria entre o subespaço métrico $X_a = \{(t, at) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}$ se e só se $|a| \geq 1$.
    (b) E se substituir d_∞ por d_1 ou d_2?

22. Seja (X, d) um espaço métrico limitado. Para cada ponto $a \in X$, defina-se $f_a : X \to \mathbb{R}$ por $f_a(x) = d(a, x)$ para $x \in X$. Mostre que:

    (a) A aplicação f_a é limitada;
    (b) A aplicação $\begin{array}{rcl} F : X & \longrightarrow & \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$ é uma imersão isométrica.

23. (a) Mostre que as métricas d_1, d_2 e d_∞ definem a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$.
    (b) Verifique quais das métricas d definidas no Exercício 2 (pág.1) são topologicamente equivalentes a d'.
    (c) Compare as topologias definidas em $\mathbb{R}$ pelas métricas do Exercício 1 (pág.1).

24. Considere, no conjunto $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, as métricas ρ do supremo e σ do integral.

    (a) Sendo $0 < r \leq 2$, considere
    $$\begin{array}{rcl} g : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{r} + 4 & \text{se } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{r}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$
    Mostre que $g \in B_r^\sigma(f) \setminus B_1^\rho(f)$, onde $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2$.
    (b) Conclua que ρ e σ não são topologicamente equivalentes.
    (c) Mostre que $\mathcal{T}^\sigma \subset \mathcal{T}^\rho$.

25. Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $X = \{a, b, c, d, e\}$:

    (a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$,

(b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$,

(c) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$,

(d) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$.

26. Mostre que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]q, +\infty[\,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ não é uma topologia em $\mathbb{R}$.

27. Prove que a intersecção de duas topologias num conjunto X ainda é uma topologia em X, mas que a sua união nem sempre é uma topologia em X. O que poderemos dizer àcerca da intersecção de uma família qualquer de topologias em X?

28. Dê exemplo de duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \not\subseteq \mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_2 \not\subseteq \mathcal{T}_1$.

29. Mostre que todo o subespaço de um espaço discreto é discreto.

30. Seja $\mathcal{T}$ a topologia usual em $\mathbb{R}$.

(a) Determine a topologia relativa $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ no conjunto $\mathbb{N}$.

(b) Verifique se cada um dos seguintes subconjuntos de $[0,1]$ é aberto em $[0,1]$:

i. $]1/2, 1]$;

ii. $]1/2, 2/3]$;

iii. $]0, 1/2]$.

31. Considere o conjunto $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]a, +\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia relativa de $[0,1]$ induzida por $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

32. Considere o conjunto $\mathcal{T}_0 = \{A \,|\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}_0$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia relativa de $]-\infty, 0]$ e de $]0, +\infty[$ induzida por $\mathcal{T}_0$.

33. Mostre que, se X e Y são conjuntos e $f : X \to Y$ é uma aplicação, então, se A, A' e A_j $(j \in J)$ são subconjuntos de X e B, B' e $B_i (i \in I)$ são subconjuntos de Y,

(a) $A \subseteq A' \;\Rightarrow\; f(A) \subseteq f(A')$;

(b) $B \subseteq B' \;\Rightarrow\; f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$;

(c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$;

(d) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;

(e) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$;

(f) $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$;

(g) $f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j))$;

(h) $f(\bigcap_{j \in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j \in J} f(A_j)$;

(i) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

(j) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

34. Retome o exercício anterior.

    (a) Apresente exemplos que mostrem que as inclusões das alíneas (c), (d), (f) e (h) podem ser estritas;

    (b) Indique uma condição que permita substituir o sinal de inclusão – em (c), (d), (f) e (h) – pelo de igualdade;

    (c) Mostre que na alínea (f) não se pode substituir $f(X)$ por Y.

35. Prove que, se $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua, também o é $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_1')$ sempre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_1' \subseteq \mathcal{T}'$.

36. Prove que, se $f : X \to Y$ é constante, então f é contínua em relação a quaisquer topologias $\mathcal{T}_1$ em X e $\mathcal{T}_2$ em Y.

37. Considere a topologia $\mathcal{T}$ definida no Exercício 31 (pág.6). Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$ são contínuas.

38. Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$, com $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$ são contínuas, onde $\mathcal{T}_0$ é a topologia definida no Exercício 32 (pág.6).

39. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Mostre que, se toda a função $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X.

40. Sejam $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função contínua, A um subconjunto de X e f_A a restrição de f a A.

    (a) Mostre que, se $\mathcal{T}_A$ é a topologia relativa definida em A por $\mathcal{T}$, então $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

    (b) Encontre um exemplo que mostre que o resultado recíproco é falso.

41. Mostre que:

    (a) o intervalo $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$;

    (b) qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

    (c) o intervalo $[0, 1]$ não é homeomorfo ao intervalo $]0, 1]$.

42. Mostre que $\mathcal{B} = \{]r, s[\,;\, r, s \in \mathbb{Q},\ r < s\}$ é uma base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.

43. Verifique se $\mathcal{S} = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}\}$ é uma base para uma topologia em $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e, em caso afirmativo, determine essa topologia.

44. Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Construa a topologia gerada por $\mathcal{U}$ quando:

    (a) $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}\}$;

    (b) $\mathcal{U} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, e\}\}$.

45. Determine a topologia em $\mathbb{R}$ gerada por $\mathcal{S} = \{[x, x + 1]; x \in \mathbb{R}\}$.

46. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual $\mathcal{T}$ e a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base

$$\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

    Mostre que $\mathcal{T}$ é menos fina do que $\mathcal{T}'$.

47. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $f : X \to [0,1]$ uma aplicação. Mostre que, se $f^{-1}(]a,1])$ e $f^{-1}([0,b[)$ são abertos de X para todo o $a, b \in]0,1[$, então f é contínua.

48. Seja X um espaço topológico. Mostre que, para que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua é necessário que os conjuntos $\{x \in X : f(x) > 0\}$ e $\{x \in X : f(x) < 0\}$ sejam abertos. Será suficiente?

49. Considere a topologia usual em $\mathbb{R}$. Prove que todo o subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado. Conclua que a topologia cofinita é menos fina do que a usual.

50. Determine os subconjuntos fechados do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]-\infty, a[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

51. Considere $\mathbb{Q}$ munido com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$.

   (a) Determine todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados.

   (b) Indique um subconjunto de $\mathbb{Q}$ (diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{Q}$) que seja simultaneamente aberto e fechado em $\mathbb{Q}$.

   (c) Mostre que toda a aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ é constante.

52. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Considere a função característica, $\chi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

   (a) Prove que, se χ é contínua, então A é simultaneamente aberto e fechado;

   (b) Prove que, se A é aberto e fechado, então χ é contínua.

53. Considere a seguinte topologia em $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}.$$

   Indique as vizinhanças dos pontos c e d.

54. Considere a topologia euclidiana em $\mathbb{R}$. Verifique se algum dos conjuntos seguintes é um sistema fundamental de vizinhanças de 0:

   (a) $\{\, [0, \varepsilon[\, ; \varepsilon > 0\}$;

   (b) $\{\,]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\, ; n \in \mathbb{N}\}$;

   (c) $\{\,]-1+\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}[\, ; n \in \mathbb{N}\}$;

   (d) $\{\, [-\delta, \delta]\, ; \delta > 0\}$.

55. Considere agora $\mathbb{R}^2$ munido da topologia euclidiana. Verifique se algum dos conjuntos é um sistema fundamental de vizinhanças do ponto (x_0, y_0):

   (a) $\{\, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} < 1\}\, ;\, a \in \mathbb{R}^+ \,\}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$;

   (b) $\{\, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, ; |x-2| + |y-3| < \frac{1}{n}\}\, ; n \in \mathbb{N}\}$, $(x_0, y_0) = (2,3)$.

56. Denotando por $\mathcal{T}_1$ a topologia cofinita, verifique se

    (a) $\{]-\delta,\delta[\,;\,\delta>0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$;

    (b) o conjunto $\{\{1\}\cup\{k\in\mathbb{N}\,;\,k\geq n\}\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 em $(\mathbb{N},\mathcal{T}_1)$.

57. Considere agora a topologia $\mathcal{T}_0=\{\,]-\infty,a[\,;\,a\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}$ e verifique se os seguintes conjuntos são sistemas fundamentais de vizinhanças de 7:

    (a) $\{\,]-\infty,7+\frac{1}{n}[\,;\,n\in\mathbb{N}\}$;

    (b) $\{\,]-\infty,7+\delta]\,;\,\delta\geq 0\}$.

58. Sejam (X,d) um espaço métrico e $\mathcal{T}$ a topologia definida por d em X. Mostre que, para cada ponto x de X, $\mathcal{B}_x=\{B_{\frac{1}{n}}(x);n\in\mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

59. Suponha que, para cada ponto y de $(Y,\mathcal{T}')$, $\mathcal{U}_y$ é um sistema fundamental de vizinhanças de y, e seja $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{T}')$ uma função. Mostre que:

    (a) f é contínua em x se e só se, qualquer que seja $U\in\mathcal{U}_{f(x)}$, $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x;

    (b) f é contínua se e só se, sempre que $U\in\mathcal{U}_{f(x)}$, $f^{-1}(U)\in\mathcal{V}_x$.

60. Sejam $(X,\mathcal{T})$ um espaço topológico e A e B dois subconjuntos de X. Mostre que:

    (a) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ e $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$;

    (b) $\mathrm{int}(A\cup B)\supseteq\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{int}(B)$ e $\mathrm{int}(A\cap B)=\mathrm{int}(A)\cap\mathrm{int}(B)$;

    (c) as inclusões anteriores podem ser estritas.

61. Sejam $(X,\mathcal{T})$ um espaço topológico e $A\subseteq X$. Mostre que:

    (a) $\overline{A}=X\setminus\mathrm{int}(X\setminus A)$;

    (b) $\overline{A}=A\cup\mathrm{fr}A$;

    (c) $\mathrm{fr}A=\emptyset\ \Leftrightarrow\ A$ aberto e fechado;

    (d) $X=\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{fr}A\cup\mathrm{int}(X\setminus A)$.

62. Seja $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ um sistema fundamental de vizinhanças do espaço topológico $(X,\mathcal{T})$. Prove que, se A é um subconjunto de X, então:

    (a) $\overline{A}=\{x\in X\,|\,(\forall B\in\mathcal{B}_x)\ B\cap A\neq\emptyset\}$;

    (b) $\mathrm{int}(A)=\{x\in X\,|\,(\exists B\in\mathcal{B}_x)\ B\subseteq A\}$;

    (c) $\mathrm{fr}A=\{x\in X\,|\,(\forall B\in\mathcal{B}_x)\ B\cap A\neq\emptyset\neq B\cap X\setminus A\}$.

63. Calcule o interior, o exterior, o fecho, a fronteira e o conjunto derivado de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

    (a) $A=]0,1]\cup\{2\}$;

    (b) $B=\mathbb{R}$;

    (c) $C=\mathbb{Q}$;

    (d) $D=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$;

    (e) $E=\{(-1)^n-\frac{(-1)^n}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$;

(f) $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

64. (a) Mostre que o conjunto $\mathcal{T}$, constituído por $\mathbb{N}$, pelo vazio e pelos conjuntos da forma $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, é uma topologia no conjunto dos números naturais.
   (b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado dos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

65. Determine o interior, o fecho, a fronteira, o exterior, o conjunto derivado e o conjunto dos pontos isolados de $A = [7, +\infty[$, $B = [3, 7[$ e $C = \mathbb{N}$ no espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, quando:
   (a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana;
   (b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$;
   (c) $\mathcal{T} = \{\, A \mid A \subseteq]-\infty, 0] \,\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

66. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico metrizável, sendo $\mathcal{T}$ definida pela métrica d. Prove que:
   (a) o fecho de um conjunto A é dado por $\overline{A} = \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x, A) = 0\}$;
   (b) a bola fechada $\{y \in X \mid d(x, y) \leq \delta\}$ é fechada em X, mas nem sempre é o fecho da bola aberta $B_\delta(x)$.

67. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X. Prove que as seguintes equivalências não se verificam, exibindo contra-exemplos:
   (a) A é aberto se e só se $A = \mathrm{int}(\overline{A})$;
   (b) A é fechado se e só se $A = \overline{\mathrm{int}(A)}$.

68. Mostre que, qualquer que seja o subconjunto A de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, A é denso se e só se, qualquer que seja o aberto U, se $U \cap A = \emptyset$, então $U = \emptyset$.

69. Seja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ um subespaço de $(X, \mathcal{T})$. Para $A \subseteq Y$, sejam $\overline{A}$ e $\mathrm{int}(A)$ o fecho e o interior de A relativamente a $\mathcal{T}$, e $\overline{A}^Y$ e $\mathrm{int}(A)^Y$ o fecho e o interior de A relativamente a $\mathcal{T}_Y$. Prove que:
   (a) $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$;
   (b) $\mathrm{int}(A) = \mathrm{int}(A)^Y \cap \mathrm{int}(Y)$.

70. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Compare $\mathrm{fr}(\mathrm{int}(A))$, $\mathrm{fr}(A)$ e $\mathrm{fr}(\overline{A})$.

71. Considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ no conjunto $X = \{a, b, c\}$ e a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, Y, \{u\}\}$ no conjunto $Y = \{u, v\}$. Determine uma base $\mathcal{B}$ da topologia produto em $X \times Y$.

72. Determine uma base para a topologia produto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ quando $\mathcal{T}$ é a topologia da alínea (b) do Exercício 65 (pág.10).

73. Sejam X e Y espaços topológicos e $X \times Y$ o seu espaço produto. Dados $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, mostre que:
   (a) $\mathrm{int}(A \times B) = \mathrm{int}(A) \times \mathrm{int}(B)$;
   (b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

74. No espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ verifique se as sucessões $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, e, em caso afirmativo, para que números reais convergem, quando:

    (a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana;

    (b) $\mathcal{T}$ é a topologia discreta;

    (c) $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta;

    (d) $\mathcal{T}$ é a topologia cofinita;

    (e) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\ a \in \mathbb{R}\}$;

    (f) $\mathcal{T} = \{A \mid A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$;

    (g) $\mathcal{T}$ é a topologia gerada pela base $\{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

75. Mostre que se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são topologias num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão que converge para x em $(X, \mathcal{T}_2)$, então (x_n) também converge para x no espaço $(X, \mathcal{T}_1)$.

76. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é separado quando $\mathcal{T}$ é definida como em cada alínea do Ex. 74 (pág.11).

77. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r\ ;\ r > 0\}$, onde $U_r = \{(x, y)\ ;\ \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$ não é separado.

78. Prove que, se X é finito, $(X, \mathcal{T})$ é um espaço separado se e só se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta.

79. Prove que, se $\mathcal{T}$ é uma topologia metrizável num conjunto X, então o espaço $(X, \mathcal{T})$ é separado.

80. (a) Mostre que, se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e injectiva e Y é um espaço separado, então também X é separado.

    (b) Conclua que todo o subespaço de um espaço separado é separado.

    (c) Dê um exemplo de um espaço não separado com um subespaço não trivial separado.

81. Mostre que o produto de dois espaços separados é separado.

82. (a) Usando resultados teóricos, mostre que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy = 1\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Conclua que as projecções de um espaço produto nos factores nem sempre são aplicações fechadas. (Sugestão: Considere o conjunto A da alínea anterior e mostre que $p_{\mathbb{R}}(A)$ não é fechado.)

83. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço conexo, quando:

    (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\ a \in \mathbb{R}\}$;

    (b) $\mathcal{T} = \{\, A\,;\ A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\, \mathbb{R}\,\}$;

    (c) $\mathcal{T}$ tem como base $\{]a, b]\,;\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.

84. Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologias no conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

    (a) $(X, \mathcal{T}_1)$ conexo $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_2)$ conexo;

    (b) $(X, \mathcal{T}_2)$ conexo $\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T}_1)$ conexo.

85. Quais dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ são conexos?

   (a) $B_1(1,0)$;
   (b) $B_1(1,0) \cup B_1(-1,0)$;
   (c) $\overline{B_1(1,0)} \cup \overline{B_1(-1,0)}$;
   (d) $\overline{B_1(1,0)} \cup B_1(-1,0)$;
   (e) $\{(q,y) \in \mathbb{R}^2 \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in [0,1]\} \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$;
   (f) o conjunto de todos os pontos que têm pelo menos uma coordenada em $\mathbb{Q}$;
   (g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } y=\frac{1}{x}\}$.

86. Dê exemplos de:

   (a) conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa;
   (b) uma sucessão decrescente de conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa.

87. (a) Dê um exemplo de um conexo de $\mathbb{R}^2$ (diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{R}^2$):
      i. X_1 tal que o complementar de X_1 seja conexo;
      ii. X_2 tal que o complementar de X_2 tenha duas componentes conexas;
      iii. X_4 tal que o complementar de X_4 tenha quatro componentes conexas;
      iv. X tal que o complementar de X tenha uma infinidade de componentes conexas.

   (b) Se os problemas de (a) fossem postos relativamente a $\mathbb{R}$ (em vez de $\mathbb{R}^2$), que respostas daria? Porquê?

88. Mostre que se o espaço X, não singular, é conexo e separado, então não tem pontos isolados.

89. Sejam A e B fechados de X tais que $A \cap B$ e $A \cup B$ são conexos. Mostre que então A e B são conexos.

   Mostre, com um contra-exemplo em $\mathbb{R}$, que a hipótese "A e B fechados" é essencial.

90. (a) Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Será necessariamente contínua uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico seja conexo?

91. Mostre que os seguintes conjuntos são conexos por arcos:

   (a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para $n > 1$;
   (b) o anel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$;
   (c) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$.

92. Usando resultados teóricos, mostre que:

   (a) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.
   (b) Quaisquer dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos:

$$\begin{aligned} A &= ([0,2] \times \{0,1\}) \cup (\{1\} \times [0,1]); \\ B &= \{(x,x) \mid |x| \le 1\} \cup \{(x,-x) \mid |x| \le 1\}; \\ C &= \{(x,x) \mid |x| \le 1\} \cup \{(x,-x) \mid x \in [-1,0]\}. \end{aligned}$$

93. (a) Mostre que todo o espaço finito é compacto.
   (b) Mostre que um espaço topológico discreto é compacto se e só se é finito.
   (c) Mostre que todo o espaço munido da topologia cofinita é compacto.
   (d) Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias definidas num conjunto A tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Mostre que, se $(A, \mathcal{T}_2)$ é compacto, também $(A, \mathcal{T}_1)$ é compacto.

94. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ são compactos?
   (a) $[0, 1)$;
   (b) $[0, +\infty)$;
   (c) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 1\}$;
   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 < 1\}$;
   (f) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}\right\}$.

95. Verifique se os subconjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{-2\} \cup]-1, 0[$ e $]0, 1[$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ são compactos, quando:
   (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;
   (b) $\mathcal{T} = \{\, A \,;\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\, \mathbb{R}\,\}$.

96. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base $\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Mostre que o intervalo $[0, 1]$ (com a topologia de subespaço de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$) não é compacto.

97. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para o ponto x no espaço topológico X. Mostre que $S = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é um subespaço compacto de X.

98. Defina uma topologia $\mathcal{T}$ em $\mathbb{N}$ de forma que o espaço $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ seja compacto e separado.

99. Seja X um espaço topológico. Mostre que:
   (a) a reunião finita de subespaços compactos de X é um compacto;
   (b) a intersecção de um subconjunto fechado com um subconjunto compacto de X é compacta;
   (c) se X é um espaço de Hausdorff, então a intersecção de qualquer família de subespaços compactos de X é ainda um compacto;
   (d) no resultado da alínea anterior é fundamental a hipótese de que o espaço topológico X seja de Hausdorff;
   (e) um subespaço compacto nem sempre é fechado.

100. (a) Mostre que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, \cdots, n\} \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é uma topologia em $\mathbb{N}$.
   (b) Verifique que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ não é compacto.
   (c) Verifique que toda a função contínua $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é constante.

101. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostre que, se A não é compacto, então:
   (a) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada;
   (b) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que, embora limitada, não tem máximo.

102. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica d definida por $d(x,y) = |x| + |y|$ se $x \neq y$.

Mostre que o conjunto $]-1,1[$:

(a) é fechado e limitado;

(b) não é compacto.

103. Considere o conjunto $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ munido da topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\beta,\gamma,\delta\}\}$. Seja $Y = \{\beta, \gamma, \varepsilon\}$.

(a) Determine o conjunto das vizinhanças de δ.

(b) Determine o interior, o fecho e o derivado de Y.

(c) Verifique se o espaço $(X, \mathcal{T})$

i. é conexo;

ii. é de Hausdorff;

iii. é compacto.

104. Seja $\mathcal{T}$ a topologia em $\mathbb{R}$ que tem como base $\mathcal{B} = \{]a,b]; a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

(a) Determine o interior, o fecho e o conjunto dos pontos isolados de $[0,1[$.

(b) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ com $f(x) = -x$ é contínua.

(c) Verifique se $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

105. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ o corpo dos números reais munido da topologia euclidiana $\mathcal{T}$. Considere

$$\mathcal{T}' := \{K \subseteq \mathbb{R} \;;\; K = \emptyset \text{ ou } \mathbb{R} \setminus K \text{ é compacto em } (\mathbb{R}, \mathcal{T})\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{T}'$ é uma topologia em $\mathbb{R}$ estritamente menos fina do que $\mathcal{T}$.

(b) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}')$, com $f(x) = x + 1$, é contínua.

(c) Verifique se $\{[-\delta, \delta] \,|\, \delta > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$.

(d) Mostre que o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ não é separado.

(e) Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ é um espaço conexo.

(f) O espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ é compacto?

106. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r \;;\; r > 0\}$, onde $U_r = \{(x,y) \;;\; \sqrt{x^2+y^2} < r\}$.

(a) Determine o interior e o fecho dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

i. $A = \{(1,0)\}$;

ii. $B = \{(x,y) \;;\; |x| \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$;

iii. $C = \{(x,y) \;;\; x \geq 1\}$.

(b) Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ não é compacto.

107. Para cada par de números reais a, b, considere $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > a \text{ e } y > b\}$, e sejam $\mathcal{A} = \{X_{a,b}; a,b \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathcal{A}$.

(a) Mostre que $\mathcal{A}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}$.

(b) Determine o fecho e o interior em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ de $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

(c) Verifique se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$

i. é separado;

ii. é conexo;

iii. é compacto.

108. Considere o espaço métrico $\mathcal{L}([0,1],\mathbb{R})$ (munido da métrica do supremo).

   (a) Mostre que, se $h \in \mathcal{L}([0,1],\mathbb{R})$, a sucessão (h_n), definida por $h_n(x) = h(x) \times \dfrac{n}{n+1}$ para todo o $x \in [0,1]$ e todo o $n \in \mathbb{N}$, converge para h.

   (b) Conclua que, se g é a função nula, então $\overline{B_1(g)} = B_1[g]$.

   (c) Prove agora que, para todo o $g \in \mathcal{L}([0,1],\mathbb{R})$ e para todo o $r > 0$, $\overline{B_r(g)} = B_r[g]$.

109. Considere agora, no conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ munido da métrica do integral, a sucessão $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ n(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}) & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

   (b) (*) Mostre que esta sucessão não é convergente.

110. Sejam $\Phi(\mathbb{R})$ o conjunto dos subconjuntos não vazios, fechados e limitados de $\mathbb{R}$ e ρ a métrica de Hausdorff em $\Phi(\mathbb{R})$; isto é, para cada $A, B \in \Phi(\mathbb{R})$,

$$\rho(A,B) = \max\{\, \sup\{d(x,B) \mid x \in A\},\ \sup\{d(y,A) \mid y \in B\}\}.$$

   (a) Mostre que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, é de Cauchy.

   (b) Verifique se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (c) Dê exemplo de uma sucessão neste espaço que não seja de Cauchy. Justifique.

111. Diga se o espaço métrico X é completo, quando:

   (a) $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;

   (b) $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$;

   (c) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y \geq 1/x\}$;

   (d) X é discreto.

112. Mostre que o espaço métrico do Exercício 102 (pág.14) é completo.

113. Mostre que, num espaço métrico:

   (a) a união finita de subespaços completos é um subespaço completo;

   (b) a união infinita de subespaços completos nem sempre é um subespaço completo;

   (c) a intersecção de qualquer família de subespaços completos é ainda um subespaço completo.

114. (a) A imagem de uma sucessão de Cauchy em X por uma função contínua $f : (X,d) \to (Y,d')$ pode não ser uma sucessão de Cauchy em Y. Dê um exemplo.

   (b) O que acontece se supusermos X completo?

115. Dê exemplos de dois espaços métricos homeomorfos, sendo um deles completo e o outro não.

116. Diga se é ou não verdade que toda a função (entre espaços métricos) cujo domínio está munido da métrica discreta é uniformemente contínua.

117. Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, é contínua mas não é uniformemente contínua.

118. Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos não vazios. Considere em $X \times Y$ a métrica

$$\begin{array}{rcl} d : (X \times Y) \times (X \times Y) & \longmapsto & \mathbb{R}. \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & \max\{d_1(x, x'), d_2(y, y')\} \end{array}$$

(a) Prove que $p_X : (X \times Y, d) \to (X, d_1)$ é uma aplicação uniformemente contínua.

(b) Mostre que uma sucessão $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em $X \times Y$ converge para (x, y) se e só se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x em (X, d_1) e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y em (Y, d_2).

(c) Prove que o espaço métrico $(X \times Y, d)$ é completo se e só se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços completos.

119. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subseteq X$. Verifique que a função $f_A : (X, d) \to \mathbb{R}$ definida por $f_A(x) = d(x, A)$ é uniformemente contínua.

120. (a) Mostre que, se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ é contínua e tem imagem não limitada, então f não é uniformemente contínua.

(b) Indique uma tal função f e uma sucessão de Cauchy em $]a, b[$ cuja imagem por f não seja uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$.

121. (a) Mostre que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uniformemente contínua e (x_n) é uma sucessão de Cauchy, então $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy.

(b) Mostre que a função $g : [1, +\infty[\to]0, 1]$, com $g(x) = \frac{1}{x}$, é uniformemente contínua.

(c) Conclua que a imagem por uma função uniformemente contínua de um espaço completo pode não ser um espaço completo. (Note que g é uma bijecção uniformemente contínua com inversa contínua.)

(d) Mostre, no entanto, que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma aplicação bijectiva, uniformemente contínua, com inversa uniformemente contínua, então (X, d) é completo se e só se (Y, d') for completo.

122. Mostre que, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a métrica discreta é topologicamente equivalente, mas não uniformemente equivalente, à métrica do Exercício 102 (pág.14).

123. (a) Considere a seguinte métrica em $]0, 1[$:

$$\begin{array}{rcl} d' :]0, 1[\times]0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right| \end{array}$$

Mostre que a métrica euclidiana d é topologicamente equivalente, mas não uniformemente equivalente, a d'.

(b) Considere agora a métrica

$$\begin{array}{rcl} d' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|} \end{array}$$

em $\mathbb{R}$. Mostre que a métrica euclidiana d é uniformemente equivalente a d'.