Sumários Alargados

1. Espaços métricos

1.1. Definição. Dado um conjunto X, chama-se métrica em X a uma função

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifique as seguintes condições, quaisquer que sejam $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ao par (X, d) chama-se espaço métrico e aos elementos de X chama-se pontos do espaço métrico (X, d).

1.2. Observações.

1. O terceiro axioma da definição de espaço métrico chama-se desigualdade triangular.
2. Note que:
   (a) A condição $d(x, y) \geq 0$ decorre das restantes: considere a desigualdade triangular com $y = z$ e use o segundo axioma.
   (b) Ao verificar o terceiro axioma para uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada, basta-nos considerar três pontos distintos $x, y, z \in X$, uma vez que, se dois deles coincidirem, o resultado é trivial ou segue imediatamente do primeiro axioma.

1.3. Exemplos.

1. Em qualquer conjunto X podemos considerar a métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

   que se designa por métrica discreta.

2. Em $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) podemos definir diversas métricas:
   (a) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,
   (b) $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (métrica euclidiana),

(c) $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\,;\, i = 1,\cdots,n\}$,

onde $x = (x_i)_{i=1,\cdots,n}$, $y = (y_i)_{i=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^n$.

3. Se (X,d) e (Y,d') são espaços métricos, podemos definir em $X \times Y$ as métricas

   (a) $d_1(a,b) = d(x_1,x_2) + d'(y_1,y_2)$,

   (b) $d_2(a,b) = \left(d(x_1,x_2)^2 + d'(y_1,y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

   (c) $d_\infty(a,b) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}$,

   onde $a = (x_1,y_1)$, $b = (x_2,y_2) \in X \times Y$.

4. Se A é um subconjunto de X e d é uma métrica em X, a restrição d_A de d a $A \times A$ é uma métrica em A. Diz-se então que (A,d_A) é um subespaço métrico de (X,d).

5. Sejam $a,b \in \mathbb{R}$. No conjunto das funções limitadas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ podemos considerar a métrica ρ definida por

$$\rho(f,g) := \sup\,\{|f(x) - g(x)|\,;\, x \in [a,b]\},$$

   onde $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções limitadas. Esta métrica chama-se habitualmente métrica do supremo, e o espaço métrico assim definido designa-se por $\mathcal{L}([a,b],\mathbb{R})$.

6. Como toda a função contínua de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada, podemos considerar ainda o subespaço métrico de $\mathcal{L}([a,b],\mathbb{R})$ das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, que se costuma denotar por $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, ou simplesmente por $\mathcal{C}[a,b]$.

7. No conjunto das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ podemos ainda considerar a métrica

$$\sigma(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx,$$

   que se designa por métrica do integral ou métrica L^1.

8. O Exemplo 5 pode ser visto como caso particular de uma construção mais geral. Em primeiro lugar, podemos substituir o intervalo $[a,b]$ por um conjunto qualquer X, uma vez que na definição da métrica do supremo é irrelevante a natureza do domínio das funções. Além disso, podemos dizer que um subconjunto A de um espaço métrico (Y,d) é limitado se existirem $a \in Y$ e $r > 0$ tais que $d(y,a) < r$ qualquer que seja $y \in A$, e que uma função $f : X \to (Y,d)$ é limitada se $f(X)$ for um subconjunto limitado de (Y,d).

   Podemos então considerar o espaço métrico $\mathcal{L}(X,(Y,d))$ das funções limitadas de X em (Y,d) munido da métrica do supremo

$$\rho(f,g) := \sup\,\{d(f(x),g(x))\,|\,x \in X\}.$$

1.4. Definições. Seja (X,d) um espaço métrico. Dados $a \in X$ e $r > 0$, os conjuntos

$$B_r(a) := \{x \in X\,|\,d(x,a) < r\} \quad \text{e} \quad B_r[a] := \{x \in X\,|\,d(x,a) \leq r\}$$

designam-se, respectivamente, por bola aberta e bola fechada de centro a e raio r.

1.5. Observação. As bolas abertas têm uma propriedade interessante:

Se $x \in B_r(a)$ então existe $s > 0$ tal que $B_s(x) \subseteq B_r(a)$.

1.6. Definições. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subseteq X$.

1. A diz-se um subconjunto aberto de (X, d) se

$$(\forall x \in A) \ \ (\exists s > 0) \ \ : \ \ B_s(x) \subseteq A.$$

2. A diz-se um subconjunto fechado de (X, d) se o seu complementar for aberto.

1.7. Proposição. Um subconjunto de um espaço métrico é aberto se e só se é reunião de bolas abertas.

1.8. Observação. Já sabemos que toda a bola aberta é um aberto. Há no entanto abertos que não são bolas abertas. Por exemplo, $]0, +\infty[$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ (com a métrica euclidiana) embora não seja uma bola aberta.

É fácil verificar que os abertos de um espaço métrico (X, d) têm as seguintes propriedades:

1. $\emptyset$ e X são subconjuntos abertos de (X, d);
2. se A e B são subconjuntos abertos de (X, d), então também $A \cap B$ o é;
3. se I é um conjunto e $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de (X, d), então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é ainda um aberto de (X, d).

Note-se que, uma vez que a intersecção de dois abertos é um aberto (Propriedade 2), também qualquer intersecção finita de abertos é um aberto. Não podemos no entanto generalizar esta propriedade ao caso de uma família qualquer de abertos: há famílias (infinitas) de abertos cuja intersecção não é aberta. Por exemplo,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[\ = \{0\}$$

não é um aberto em $\mathbb{R}$.

1.9. Proposição. Um subconjunto A do espaço métrico (X, d) é fechado se e só se

$$(\forall x \in X) \ \ (x \in A \ \Leftrightarrow \ d(x, A) = 0).$$

1.10. Definições. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.

1. Diz-se que $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma função contínua em $a \in X$ se

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \ \ : \ \ (\forall x \in X) \ \ d(x, a) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

2. A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ diz-se uma função contínua se for contínua em todo o ponto x de X.

1.11. Observação. Na definição de função contínua em $a \in X$ as bolas abertas são essenciais. De facto:

> Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se
> $$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) \ : \ f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)).$$

O estudo dos subconjuntos abertos de um espaço métrico é justificado pelo seguinte resultado.

1.12. Proposição. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.*

1. *$f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se, para cada subconjunto aberto V de (Y, d') ao qual $f(a)$ pertença, existir um subconjunto aberto U de (X, d) tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq V$.*
2. *A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua se e só se todo o subconjunto aberto de (Y, d) tiver como imagem inversa por f um subconjunto aberto de (X, d).*

2. Espaços topológicos e funções contínuas

2.1. Definição. Dado um conjunto X, um subconjunto $\mathcal{T}$ do conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes de X diz-se uma **topologia em** X se

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
2. se $A, B \in \mathcal{T}$ então $A \cap B \in \mathcal{T}$;
3. se $(A_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$, então $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Ao par $(X, \mathcal{T})$ chama-se **espaço topológico**. Os elementos de $\mathcal{T}$ dizem-se os **abertos** do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.

2.2. Definições. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.

1. $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se **contínua em** $a \in X$ se
$$(\forall V \in \mathcal{T}') \ f(a) \in V \ \Rightarrow \ (\exists U \in \mathcal{T}) \ : \ a \in U \text{ e } f(U) \subseteq V.$$
2. A **função** f diz-se **contínua** se
$$(\forall V \in \mathcal{T}') \ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

2.3. Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ e $(Z, \mathcal{T}'')$ são espaços topológicos e $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ e $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ são funções contínuas, então a sua composição $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ é ainda uma função contínua.*

2.4. Exemplos.

1. Se (X, d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é o conjunto dos abertos definidos pela métrica d, então $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico. Por exemplo, a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$ define uma topologia em $\mathbb{R}^n$, a que se chama **topologia euclidiana**.
2. Em qualquer conjunto X podemos definir duas topologias (que coincidem caso o conjunto X seja vazio ou singular):

(a) a topologia discreta $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, em que todo o subconjunto de X é aberto (induzida pela métrica discreta);

(b) a topologia indiscreta $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$, que tem apenas os abertos triviais: o conjunto vazio e o espaço X.

3. Se X é um conjunto qualquer,

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ é um conjunto finito}\}$$

é uma topologia em X, a que se dá o nome de topologia cofinita.

4. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dado um subconjunto A de X,

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A\, ;\, U \in \mathcal{T}\}$$

é uma topologia em A. A esta topologia chama-se topologia relativa – ou topologia de subespaço – em A induzida por $\mathcal{T}$.

2.5. Observações. Um espaço topológico cuja topologia seja exactamente o conjunto dos abertos definidos por uma métrica diz-se um espaço topológico metrizável.

Note-se que:

1. Duas métricas diferentes num conjunto X podem definir a mesma topologia. Nesse caso as métricas dizem-se métricas topologicamente equivalentes.

2. Há espaços topológicos que não são metrizáveis.

2.6. Proposição. Se d e d' são métricas num conjunto X, d e d' são topologicamente equivalentes se e só se as funções

$$\begin{array}{ccc} (X,d) & \longrightarrow & (X,d') \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} (X,d') & \longrightarrow & (X,d) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

são contínuas.

2.7. Proposição. Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\mathcal{T}_A$ é a topologia de subespaço em $A \subseteq X$, então a função inclusão

$$\begin{array}{ccc} (A,\mathcal{T}_A) & \longrightarrow & (X,\mathcal{T}) \\ a & \longmapsto & a \end{array}$$

é contínua.

2.8. Proposição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.

1. Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

2. Se $\mathcal{T}'$ é a topologia indiscreta, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

2.9. Proposição.

1. Se $\mathcal{T}$ é uma topologia num conjunto X tal que toda a função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua, então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta.

2. Se $\mathcal{T}'$ é uma topologia num conjunto Y tal que toda a função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua, então $\mathcal{T}'$ é a topologia indiscreta.

2.10. Definição. Seja X um conjunto. No conjunto das topologias em X podemos definir uma relação de ordem do seguinte modo: se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Nesse caso diz-se que $\mathcal{T}$ é uma topologia menos fina do que $\mathcal{T}'$ e que $\mathcal{T}'$ é uma topologia mais fina do que $\mathcal{T}$.

2.11. Observações.

1. Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, dizer que $\mathcal{T}$ é mais fina do que $\mathcal{T}'$ é equivalente a dizer que a função identidade $(X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T}')$ é contínua.

2. Note que a topologia discreta é mais fina do que qualquer outra topologia que se possa definir no conjunto X, enquanto que a topologia indiscreta é menos fina do que qualquer outra.

2.12. Definições. Sejam $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ espaços topológicos.

1. Uma função $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ diz-se um homeomorfismo se for uma função contínua, bijectiva, com função inversa $g : (Y,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ contínua.

2. Se existir um homeomorfismo $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ diz-se que os espaços topológicos $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ são homeomorfos.

3. Bases e sub-bases

3.1. Definição. Um subconjunto $\mathcal{B}$ de uma topologia $\mathcal{T}$ num conjunto X diz-se uma base da topologia $\mathcal{T}$ se todo o elemento de $\mathcal{T}$ for uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$; isto é

$$\mathcal{T} = \{\bigcup_{i\in I} B_i \,|\, (B_i)_{i\in I} \text{ é uma família de elementos de } \mathcal{B}\}.$$

3.2. Lema. Se $(X,\mathcal{T})$ é um espaço topológico, então $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$ se e só se, para todo o aberto A, se verificar

$$(\forall x \in A)\ (\exists B \in \mathcal{B})\ :\ x \in B \subseteq A.$$

3.3. Exemplos.

1. Se (X,d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é a topologia definida pela métrica d, então o conjunto

   $$\mathcal{B} = \{B_r(x) \,|\, r > 0,\ x \in X\}$$

   é uma base para a topologia $\mathcal{T}$.

   Em particular, os intervalos abertos limitados formam uma base para a topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.

2. Um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de X é uma base para a topologia discreta em X se e só se, para todo o ponto x de X, $\{x\} \in \mathcal{B}$.

3.4. Proposição. Dados um conjunto qualquer X e um subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(X)$, o conjunto $\mathcal{T}$ constituído pelas reuniões quaisquer de intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma topologia em X.

3.5. Definição. Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ estão nas condições da proposição anterior, diz-se que $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}$, e que $\mathcal{T}$ é a topologia gerada por $\mathcal{S}$. A topologia gerada por $\mathcal{S}$ é portanto a topologia menos fina que contém $\mathcal{S}$.

3.6. Exemplos.

1. Toda a base de uma topologia é em particular uma sub-base.
2. O conjunto $\{]a, a+1[\,|\, a \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.
3. A topologia euclidiana em $\mathbb{R}$ é gerada pelo conjunto
$$\mathcal{S} = \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, b[\,;\, b \in \mathbb{R}\}.$$
4. Qualquer que seja X, $\{X \setminus \{x\} \,|\, x \in X\}$ é uma sub-base da topologia cofinita em X.

3.7. Proposição. Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}'$, então uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se toda a imagem inversa, por f, de um elemento de $\mathcal{S}$ for um aberto em $(X, \mathcal{T})$.

3.8. Proposição. Sejam X um conjunto e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. As seguintes condições são equivalentes:

(i) $\mathcal{S}$ é uma base para uma topologia em X.

(ii) (B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$;

(B2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{S})\ (\forall x \in B_1 \cap B_2)\ (\exists B_3 \in \mathcal{S})\ :\ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(iii) (B'1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$;

(B'2) quaisquer que sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$, $B_1 \cap B_2$ é reunião de elementos de $\mathcal{S}$.

3.9. Proposição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T}_A$ a topologia relativa em $A \subseteq X$.

1. Se $\mathcal{B}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}$, então $\mathcal{B}_A := \{B \cap A\,;\, B \in \mathcal{B}\}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}_A$.
2. Se $\mathcal{S}$ é uma sub-base da topologia $\mathcal{T}$, então $\mathcal{S}_A := \{S \cap A\,;\, S \in \mathcal{S}\}$ é ainda uma sub-base da topologia $\mathcal{T}_A$.

4. Subconjuntos fechados de um espaço topológico

4.1. Definição. Um subconjunto A de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ chama-se fechado se o seu complementar for aberto.

4.2. Proposição. Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ se e só se verifica as seguintes condições:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$;
2. se $U, V \in \mathcal{F}$ então $U \cup V \in \mathcal{F}$;
3. se $(U_i)_{i \in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{F}$, então $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{F}$.

4.3. Proposição. Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se, qualquer que seja o subconjunto fechado F de $(Y, \mathcal{T}')$, $f^{-1}(F)$ é fechado em $(X, \mathcal{T})$.

4.4. Lema. Se $\mathcal{F}$ é o conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e A é um subconjunto de X, então

$$\mathcal{F}_A = \{F \cap A \,|\, F \in \mathcal{F}\}$$

é o conjunto dos fechados do subespaço $(A, \mathcal{T}_A)$.

4.5. Definições. Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se aberta se, qualquer que seja $A \in \mathcal{T}$, $f(A) \in \mathcal{T}'$; diz-se uma função fechada se, sempre que A for um subconjunto fechado de X, $f(A)$ for um subconjunto fechado de Y.

4.6. Proposição. Se $\mathcal{T}_A$ é a topologia de subespaço em A definida por $(X, \mathcal{T})$, então a função inclusão $(A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ é aberta (fechada) se e só se A é um subconjunto aberto (fechado) de $(X, \mathcal{T})$.

4.7. Lema. Toda a função bijectiva, contínua e aberta é um homeomorfismo.

5. Vizinhanças

5.1. Definição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e a um ponto de X. Diz-se que um subconjunto V de X é uma vizinhança de a se existir um aberto A tal que $a \in A \subseteq V$.

Designaremos o conjunto das vizinhanças de a em $(X, \mathcal{T})$ por $\mathcal{V}_a$.

5.2. Exemplos. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

1. Qualquer que seja $a \in X$, $X \in \mathcal{V}_a$.
2. Se A é aberto e $a \in A$, então $A \in \mathcal{V}_a$.
3. Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, então, quaisquer que sejam $A \subseteq X$ e $a \in A$, $A \in \mathcal{V}_a$.

5.3. Proposição. Um subconjunto A de X é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos.

5.4. Proposição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, a um ponto de X e $\mathcal{V}_a$ o conjunto das vizinhanças de a. Então:

1. $\mathcal{V}_a \neq \emptyset$ e $V \in \mathcal{V}_a \;\Rightarrow\; a \in V$;
2. $V \in \mathcal{V}_a$ e $W \supseteq V \;\Rightarrow\; W \in \mathcal{V}_a$;
3. $V, W \in \mathcal{V}_a \;\Rightarrow\; V \cap W \in \mathcal{V}_a$;

5.5. Proposição. Seja $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função.

1. f é contínua em $a \in X$ se e só se a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(a)$ é uma vizinhança de a.
2. f é contínua se e só se, para todo o $x \in X$, a imagem inversa por f de qualquer vizinhança de $f(x)$ é uma vizinhança de x.

5.6. Definição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $x \in X$. Um subconjunto $\mathcal{U}_x$ de $\mathcal{V}_x$ diz-se uma base de vizinhanças de x ou sistema fundamental de vizinhanças de x se, para cada $V \in \mathcal{V}_x$, existir $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subseteq V$.

5.7. Exemplos.

1. Se $\mathcal{T}$ for uma topologia em X definida por uma métrica d, então o conjunto das bolas abertas centradas em $x \in X$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

2. Se $\mathcal{T}$ for a topologia discreta em X, então o conjunto singular $\mathcal{U}_x = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $x \in X$.

5.8. Proposição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T}_A$ a topologia relativa em $A \subseteq X$.

1. Se $x \in A$ e $\mathcal{V}_x$ é o conjunto das vizinhanças de x no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então

$$\mathcal{V}'_x := \{V \cap A\,;\, V \in \mathcal{V}_x\}$$

é o conjunto das vizinhanças de x em $(A, \mathcal{T}_A)$.

2. Se $x \in A$ e $\mathcal{U}_x$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então

$$\mathcal{U}'_x := \{U \cap A\,;\, U \in \mathcal{U}_x\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de x em $(A, \mathcal{T}_A)$.

6. Operações de interior e de aderência

6.1. Definição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X. Um ponto x de X diz-se um ponto interior de A se A for uma vizinhança de x.

Ao conjunto dos pontos interiores de A chama-se interior de A e denota-se por $\overset{\circ}{A}$, $\mathrm{int}(A)$ ou simplesmente $\mathrm{int}A$.

6.2. Lema. Se A é um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então:

1. $\mathrm{int}(A) \subseteq A$;

2. $\mathrm{int}(A) = A \;\Leftrightarrow\; A \in \mathcal{T}$;

3. $\mathrm{int}(A)$ é um aberto: é o maior aberto contido em A; logo,

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup\{B \in \mathcal{T}\,;\, B \subseteq A\}.$$

6.3. Proposição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subseteq X$. Então:

1. $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$;

2. $A \in \mathcal{T},\; A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \subseteq \mathrm{int}(B)$;

3. $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$;

4. $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.

6.4. Exemplos.

1. Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $A \subseteq X$, $\mathrm{int}(A) = A$.

2. Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então $\mathrm{int}(X) = X$ e $\mathrm{int}(A) = \emptyset$ desde que $A \neq X$.

3. Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana, $\mathrm{int}([a,b]) =]a,b[$, $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$, $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

4. Em $\mathbb{R}$, com a topologia cofinita, se $A \subseteq \mathbb{R}$, então

$$\mathrm{int}(A) = \begin{cases} A & \text{se } \mathbb{R} \setminus A \text{ finito} \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6.5. Definição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Um ponto x de X diz-se um ponto aderente de A se toda a vizinhança de x intersecta A; isto é, se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x) \;\; V \cap A \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos aderentes de A chama-se aderência de A ou fecho de A, e representa-se por $\overline{A}$ ou ad$A$.

6.6. Lema. Se A é um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então:

1. $A \subseteq \overline{A}$;

2. $A = \overline{A} \;\Leftrightarrow\; A$ é fechado;

3. $\overline{A}$ é um fechado, é aliás o menor fechado que contém A; portanto

$$\overline{A} = \bigcap\{F\,;\, F \text{ é fechado em } (X, \mathcal{T}) \text{ e } A \subseteq F\}.$$

6.7. Proposição. Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $A, B \subseteq X$, então:

1. $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq \overline{B}$;

2. A fechado, $B \subseteq A \;\Rightarrow\; \overline{B} \subseteq A$;

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

4. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

6.8. Exemplos.

1. Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $A \subseteq X$, $\overline{A} = A$.

2. Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{A} = X$ desde que $A \neq \emptyset$.

3. Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana, $\overline{]a,b[} = [a,b]$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

4. Em $\mathbb{R}$, com a topologia cofinita, se $A \subseteq \mathbb{R}$, então

$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{se } A \text{ finito} \\ \mathbb{R} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

6.9. Proposição. Seja $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é contínua;

(ii) qualquer que seja $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$;

(iii) qualquer que seja $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

6.10. Proposição. Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua e fechada se e só se, para todo o $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

6.11. Definições. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X.

1. A diz-se denso se $\overline{A} = X$.

2. Um ponto x de X diz-se ponto fronteira de A se
$$(\forall U \in \mathcal{V}_x) \;\; U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus A).$$
O conjunto dos pontos fronteira de A chama-se fronteira de A e designa-se por $\mathrm{fr}A$.

3. Um ponto x de X diz-se ponto exterior de A se tiver uma vizinhança que não intersecta A; isto é, se for um ponto interior do complementar de A.

   O conjunto dos pontos exteriores de A chama-se exterior de A e denota-se por $\mathrm{ext}A$.

4. Um ponto x de X diz-se ponto de acumulação de A se
$$(\forall V \in \mathcal{V}_x) \quad V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset;$$
isto é, se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

   O conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se derivado de A e designa-se por A' ou A^d.

   Um ponto $x \in A$ diz-se ponto isolado de A se não for ponto de acumulação.

6.12. Exemplos.

1. Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X, qualquer que seja $A \subseteq X$, $\mathrm{fr}A = \emptyset$, $\mathrm{ext}A = X \setminus A$ e $A' = \emptyset$; logo, todos os pontos de A são isolados.

2. Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta em X, então, se A é um subconjunto não vazio de X, A é denso e $\mathrm{fr}A = X$. Quanto ao conjunto derivado, se A for um conjunto singular, então $A' = X \setminus A$, enquanto que $A' = X$ desde que A tenha pelo menos dois pontos.

3. Em $\mathbb{R}$, com a topologia euclidiana,

   (a) $\mathrm{fr}(]a, b[) = \mathrm{fr}([a, b]) = \{a, b\}$, $\mathrm{fr}(\{x\}) = \{x\}$, $\mathrm{fr}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$;

   (b) $\mathrm{ext}(]a, b[) =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$, $\mathrm{ext}(\{x\}) = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, $\mathrm{ext}\mathbb{Q} = \emptyset$;

   (c) $([a, b])' = [a, b]$, $\{x\}' = \emptyset$, $\mathbb{N}' = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

7. Topologia produto

7.1. Definição. Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. A topologia $\mathcal{T}$ em $X \times Y$ gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{U \times V \,;\, U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$$

chama-se topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$.

Ao espaço topológico $(X \times Y, \mathcal{T})$ chama-se espaço produto.

7.2. Proposição. Se $\mathcal{T}$ é a topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$, então:

1. As projecções $p_X : (X \times Y, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_X)$ e $p_Y : (X \times Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ são contínuas.
2. Uma função $f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X \times Y, \mathcal{T})$ é contínua se e só se as funções compostas $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ são contínuas.

7.3. Observação. A definição e a proposição anteriores são facilmente generalizáveis ao produto finito de espaços topológicos. Assim, a topologia produto no conjunto $\prod_{i=1}^{n} X_n$ das topologias $\mathcal{T}_i$ definidas em X_i $(i = 1, \cdots, n)$ tem como base

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i=1}^{n} U_i \,;\, U_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

Temos então:

7.4. Proposição. Se $\mathcal{T}$ é a topologia produto no conjunto $\prod_{i=1}^{n} X_n$ das topologias $\mathcal{T}_i$ definidas em X_i $(i = 1, \cdots, n)$, então:

1. As projecções $p_i : (\prod_{i=1}^{n} X_n, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \cdots, n$, são contínuas.
2. Uma função $f : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (\prod_{i=1}^{n} X_n, \mathcal{T})$ é contínua se e só se as funções compostas $p_i \circ f$, $i = 1, \cdots, n$, são contínuas.

7.5. Observação. As projecções p_i definidas na proposição anterior são abertas.

7.6. Corolários.

1. Se $f : X \to Y_1$ e $g : X \to Y_2$ são funções entre espaços topológicos, e se considerarmos o conjunto $Y_1 \times Y_2$ munido da topologia produto, a função

$$\begin{array}{rcl} < f, g >: X & \longrightarrow & Y_1 \times Y_2 \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)). \end{array}$$

   é contínua se e só se f e g o são.

2. Se $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ são funções entre espaços topológicos, definimos

$$\begin{array}{rcl} f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 & \longrightarrow & Y_1 \times Y_2, \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (f_1(x_1), f_2(x_2)). \end{array}$$

   Supondo $X_1 \times X_2$ e $Y_1 \times Y_2$ munidos da topologia produto, a função $f_1 \times f_2$ é contínua se e só se f_1 e f_2 o são.

7.7. Exemplos.

1. A topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é a topologia produto das topologias euclidianas em cada um dos factores $\mathbb{R}$.

2. Sejam $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ espaços topológicos.

   (a) Se, para todo o i, $\mathcal{T}_i$ é a topologia indiscreta em X_i, então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ é a topologia indiscreta em $\prod\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

   (b) Se, para todo o i, $\mathcal{T}_i$ é a topologia discreta em X_i, então a topologia produto da família $(\mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ é a topologia discreta em $\prod\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

8. Sucessões convergentes

8.1. Definições. Se X é um conjunto, uma sucessão em X é uma função $f : \mathbb{N} \to X$. A $f(n)$ chama-se termo da sucessão de ordem n; o termo $f(n)$ designa-se habitualmente por x_n, e a sucessão f por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n).

Uma subsucessão de $f : \mathbb{N} \to X$ é a composição de f com uma aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monótona e injectiva; $f \circ \varphi$ costuma-se designar por $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

8.2. Definições. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

1. Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X converge para $x \in X$ se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x)\ \ (\exists p \in \mathbb{N})\ \ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geq p \ \ \Rightarrow \ \ x_n \in V.$$

   Diz-se então que x é um limite da sucessão (x_n).

   Uma sucessão em $(X, \mathcal{T})$ que convirja para algum ponto x de X diz-se uma sucessão convergente.

2. Um ponto y de X é um ponto aderente de (x_n) se

$$(\forall V \in \mathcal{V}_x)\ \ (\forall p \in \mathbb{N})\ \ (\exists n \in \mathbb{N})\ \ :\ \ n \geq p \ \text{ e } \ x_n \in V.$$

8.3. Lema. Se (x_n) converge para x e $(x_{\varphi(n)})$ é uma subsucessão de (x_n), então $(x_{\varphi(n)})$ também converge para x.

8.4. Lema. Um ponto y de $(X, \mathcal{T})$ é um ponto aderente de uma sucessão (x_n) em X se e só se

$$y \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n\,;\, n \geq p\}}.$$

8.5. Observações.

1. Se x é um limite de (x_n), então é ponto aderente de (x_n). O recíproco não se verifica.

2. Toda a sucessão constante – ou constante a partir de alguma ordem – igual a x é convergente, e converge para x.

3. Uma sucessão pode convergir para mais do que um ponto.

8.6. Exemplos.

1. Num espaço discreto uma sucessão é convergente se e só se é constante a partir de alguma ordem.

2. Num espaço indiscreto toda a sucessão é convergente, e converge para todo o ponto do espaço.

8.7. Proposição. Se $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ é uma função contínua e (x_n) é uma sucessão que converge para x em X, então $f(x_n)$ converge para $f(x)$ em Y.

8.8. Proposição. Se A é um subconjunto de $(X, \mathcal{T})$ e (x_n) é uma sucessão em A que converge para x em X, então $x \in \overline{A}$.

9. Espaços topológicos separados

9.1. Definição. Um espaço topológico diz-se um espaço de Hausdorff, ou espaço separado, ou espaço T_2 se

$$(\forall x, y \in X)\ \ x \neq y \ \ \Rightarrow \ \ (\exists U \in \mathcal{V}_x)\ \ (\exists V \in \mathcal{V}_y) \ \ : \ \ U \cap V = \emptyset.$$

9.2. Proposição. Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço separado e se x e y são limites de uma sucessão (x_n) em X, então $x = y$.

9.3. Exemplos.

1. Todo o espaço topológico metrizável é separado; em particular, $\mathbb{R}^n$, assim como todo o espaço discreto, é separado.

2. Se $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\, ;\, a \in \mathbb{R}\}$, então $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é separado.

3. Se $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta num conjunto X com mais do que um ponto, então $(X, \mathcal{T})$ não é separado.

9.4. Teorema. As seguintes condições são equivalentes, para um espaço topológico (X, T):

(i) o espaço X é separado;

(ii) $(\forall x, y \in X)\ \ x \neq y \ \ \Rightarrow \ \ (\exists A, B \in \mathcal{T}) \ \ : \ \ x \in A, \ \ y \in B,$ e $A \cap B = \emptyset$;

(iii) o conjunto $\Delta = \{(x, x)\, ;\, x \in X\}$ é um subconjunto fechado no espaço produto $X \times X$.

9.5. Proposição. Sejam Y um espaço de Hausdorff e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Então:

1. O conjunto $\{x \in X\ ;\ f(x) = g(x)\}$ é fechado em X.

2. Se f coincide com g num subconjunto denso de X, então $f = g$.

9.6. Corolário. Sejam X e Y espaços topológicos, com Y separado. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua, então $\Gamma_f := \{(x, f(x))\, ;\, x \in X\}$ de $X \times Y$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

10. Espaços topológicos conexos

10.1. Definição. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ diz-se conexo se não for reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos não vazios.

Um espaço diz-se desconexo se não for conexo.

10.2. Proposição. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $(X, \mathcal{T})$ é um espaço conexo.

(iii) X não é reunião de dois subconjuntos fechados disjuntos não vazios.

(iii) Se U é um subconjunto simultaneamente aberto e fechado de $(X, \mathcal{T})$, então $U = X$ ou $U = \emptyset$.

(iv) Qualquer aplicação contínua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_d)$, onde $\mathcal{T}_d$ é a topologia discreta, é constante.

10.3. Definição. Um subconjunto A de $(X, \mathcal{T})$ diz-se conexo se o subespaço $(A, \mathcal{T}_A)$ for conexo.

10.4. Exemplos.

1. Se $\mathrm{card}X \leq 1$, X é um espaço conexo (quando munido da única estrutura topológica possível).
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são subconjuntos desconexos de $\mathbb{R}$.
3. Se X é um espaço discreto, então X é conexo se e só se tem quando muito um ponto.
4. Se X é um espaço indiscreto, então X é conexo.
5. Se X é um conjunto infinito munido da topologia cofinita, então X é conexo.

10.5. Proposição. Seja A um subconjunto de $(X, \mathcal{T})$. As seguintes condições são equivalentes:

(i) A é um subconjunto conexo;

(ii) $(\forall U, V \in \mathcal{T})\ \ A \subseteq U \cup V\ ,\ A \cap (U \cap V) = \emptyset \ \ \Rightarrow \ \ A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$;

(iii) $(\forall U, V \in \mathcal{T})\ \ A \subseteq U \cup V\ ,\ A \cap (U \cap V) = \emptyset \ \ \Rightarrow \ \ A \cap U = \emptyset$ ou $A \cap V = \emptyset$.

10.6. Proposição. Se A é um subconjunto de $(X, \mathcal{T})$ denso e conexo, então o espaço $(X, \mathcal{T})$ é conexo.

10.7. Corolário. Se A é um subconjunto conexo de $(X, \mathcal{T})$ e B é um subconjunto de X tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é conexo.

10.8. Proposição. Sejam A e B subconjuntos de $(X, \mathcal{T})$, com A conexo. Se

$$A \cap \mathrm{int}(B) \neq \emptyset \neq A \cap \mathrm{int}(X \setminus B),$$

então $A \cap \mathrm{fr}B \neq \emptyset$.

10.9. Proposição. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos de $(X, \mathcal{T})$. Se $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é um subconjunto conexo de $(X, \mathcal{T})$.

10.10. Corolários.

1. Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos conexos de $(X,\mathcal{T})$ que se intersectam dois a dois (isto é, para todo o par i,j em I, $A_i\cap A_j\neq\emptyset$), então $\bigcup_{i\in I} A_i$ é um subconjunto conexo de $(X,\mathcal{T})$.
2. Se $(X,\mathcal{T})$ é um espaço topológico tal que, para cada par de pontos x e y de X, existe um subconjunto conexo que os contém, então $(X,\mathcal{T})$ é conexo.

10.11. Teorema. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se é um intervalo.

10.12. Proposição. Se $f:X\to Y$ é contínua e sobrejectiva e X é conexo, então Y é conexo.

10.13. Corolários.

1. Se $f:X\to Y$ é contínua e A é um subconjunto conexo de X, então $f(A)$ é um subconjunto conexo de Y.
2. Se $f:X\to Y$ é um homeomorfismo, então X é conexo se e só se Y o é.
3. Se $f:X\to\mathbb{R}$ é contínua e X é conexo, então $f(X)$ é um intervalo.
4. Em $\mathbb{R}^2$, com a métrica euclidiana, qualquer bola aberta é conexa.

10.14. Teorema. Se $(X,\mathcal{T}_X)$ e $(Y,\mathcal{T}_Y)$ são espaços não vazios e $\mathcal{T}$ é a topologia produto de $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$, então $(X\times Y,\mathcal{T})$ é conexo se e só se $(X,\mathcal{T}_X)$ e $(Y,\mathcal{T}_Y)$ o são.

10.15. Exemplos.

1. $\mathbb{R}^2$ é conexo; o complementar de um ponto em $\mathbb{R}^2$ é ainda conexo, mas o complementar de uma recta é desconexo.

10.16. Definição. Sejam X um espaço topológico e $x\in X$. Chama-se componente conexa de x ao maior conexo que contém x.
(Nota: Como a família de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x é uma família de conexos com intersecção não vazia, a sua reunião é necessariamente o maior conexo que contém x.)

10.17. Proposição.

1. Se C_x e C_y são componentes conexas em X de x e y, respectivamente, então $C_x=C_y$ ou $C_x\cap C_y=\emptyset$.
2. Toda a componente conexa é fechada (mas pode não ser aberta).

10.18. Exemplos.

1. Se X é um espaço discreto, então a componente conexa de $x\in X$ é $\{x\}$.
2. Se X é um espaço indiscreto, então a componente conexa de qualquer ponto é X.
3. Se considerarmos $\mathbb{Q}$ com a topologia euclidiana, a componente conexa de cada número racional x é $\{x\}$.

10.19. Proposição. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua, então a imagem por f de uma componente conexa está contida numa componente conexa (mas pode não coincidir com ela).

10.20. Corolários.

1. Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo e C_x é a componente conexa de x em X, então $f(C_x)$ é a componente conexa de $f(x)$ em Y.
2. Dois espaços homeomorfos têm o mesmo número de componentes conexas.
3. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços homeomorfos. Se $x \in X$ e $X\backslash\{x\}$ tem n componentes conexas, então existe $y \in Y$ tal que $Y\backslash\{y\}$ tem n componentes conexas.

10.21. Definições.

1. Dado um espaço topológico X, um caminho em X é uma aplicação contínua $f : [0,1] \to X$. Diz-se que um caminho f vai de a a b se $f(0) = a$ e $f(1) = b$.
2. Um espaço topológico X diz-se conexo por arcos se dados quaisquer pontos a e b de X existir um caminho em X de a a b.

10.22. Observação. Todo o espaço conexo por arcos é conexo, mas nem todo o espaço conexo é conexo por arcos. Por exemplo, o subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$X := \{(x, \sin(\frac{1}{x})\,;\, x > 0\} \cup \{(0, y)\,;\, y \in [-1, 1]\}$$

é conexo mas não é conexo por arcos.

10.23. Proposição. Todo o subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$ é conexo por arcos.

11. Espaços topológicos compactos

11.1. Definições. Seja X um conjunto.

1. Uma família $(U_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X diz-se uma cobertura de X se $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.
2. Se $(U_i)_{i\in I}$ é uma cobertura de X e J é um subconjunto de I tal que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$, então $(U_j)_{j\in J}$ diz-se uma subcobertura de $(U_i)_{i\in I}$; diz-se finita se J for um conjunto finito.
3. Uma cobertura $(U_i)_{i\in I}$ de um espaço topológico X diz-se uma cobertura aberta de X se todo o conjunto U_i for aberto em X.

11.2. Teorema de Heine-Borel. Dado um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, de toda a cobertura aberta de $[a, b]$ é possível extrair uma subcobertura finita.

11.3. Definição. Um espaço topológico diz-se compacto se toda a cobertura aberta de X tiver uma subcobertura finita.

11.4. Proposição. Um espaço X é compacto se e só se, sempre que $(F_i)_{i\in I}$ for uma família de subconjuntos fechados de X tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, existe um subconjunto finito J de I tal que $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$.

11.5. Proposição. Sejam $(X,\mathcal{T})$ um espaço topológico, Y um subconjunto de X e $\mathcal{T}_Y$ a topologia de subespaço em Y. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) O espaço $(Y,\mathcal{T}_Y)$ é compacto.

(ii) Sempre que $(U_i)_{i\in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$ tal que $Y\subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, existe um subconjunto finito J de I tal que $Y\subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$.

11.6. Exemplos.

1. Todo o espaço finito é compacto.
2. Se X é um espaço discreto, então X é compacto se e só se é finito.
3. Todo o espaço indiscreto é compacto.
4. $\mathbb{R}$ não é compacto.
5. O espaço $]0,1]$, com a topologia euclidiana, não é compacto.

11.7. Proposição.

1. Todo o subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.
2. Todo o subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.

11.8. Corolário. Se o espaço X é compacto e de Hausdorff e Y é um subespaço de X, então Y é compacto se e só se é fechado em X.

11.9. Proposição. Se $f:X\to Y$ é uma aplicação contínua e A é um subespaço compacto de X, então $f(A)$ é um subespaço compacto de Y.

11.10. Corolários.

1. Se X é um espaço compacto e Y um espaço separado, então toda a aplicação contínua $f:X\to Y$ é fechada.
2. Se X é compacto e Y é separado, então toda a aplicação bijectiva e contínua $f:X\to Y$ é um homeomorfismo.

11.11. Teorema de Tychonoff. Sejam X e Y espaços topológicos não vazios. O espaço produto $X\times Y$ é compacto se e só se X e Y são compactos.

11.12. Teorema de Kuratowski-Mrowka. Um espaço topológico X é compacto se e só se, para cada espaço Y, a projecção $p_Y : X\times Y\to Y$ é fechada.

11.13. Proposição. Todo o espaço métrico compacto é limitado.

11.14. Teorema. Um subespaço de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é fechado e limitado.

12. Sucessões convergentes e de Cauchy em espaços métricos

12.1. Lema. Num espaço métrico uma sucessão não pode convergir para dois pontos distintos.

12.2. Teorema. Se X é um espaço métrico e A é um subconjunto de X, então um ponto x de X pertence a $\overline{A}$ se e só se existe uma sucessão em A que converge para x em X.

12.3. Corolário. Um subconjunto A de um espaço métrico X é fechado se e só se toda a sucessão convergente com valores em A tem o seu limite em A.

12.4. Teorema. Se X e Y são espaços métricos e $f : X \to Y$ é uma função, então f é contínua se e só se, sempre que (x_n) é uma sucessão em X que converge para x, a sucessão $(f(x_n))$ converge para $f(x)$.

12.5. Proposição. Num espaço métrico todo o ponto aderente a uma sucessão é limite de uma subsucessão da sucessão dada.

12.6. Definição. Uma sucessão (x_n) num espaço métrico (X, d) diz-se uma sucessão de Cauchy se verificar a seguinte condição

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists p \in \mathbb{N}) \ \ : \ \ (\forall n, m \in \mathbb{N}) \ \ n \geq p, \ m \geq p \ \ \Rightarrow \ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

12.7. Proposição.

1. Toda a sucessão convergente num espaço métrico é de Cauchy.
2. Toda a sucessão de Cauchy é limitada.

12.8. Proposição. Toda a sucessão de Cauchy com uma subsucessão convergente é convergente.

12.9. Corolário. Se (x_n) é uma sucessão num espaço métrico, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) (x_n) é convergente;

(ii) (x_n) é de Cauchy e tem um ponto aderente;

(iii) (x_n) é de Cauchy e tem uma subsucessão convergente.

13. Espaços métricos completos

13.1. Definição. Um espaço métrico (X, d) diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em X for convergente.

13.2. Exemplos.

1. $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.
2. $\mathbb{Q}$ e $]0, 1]$, com a métrica euclidiana, não são espaços completos.

13.3. Proposição.

1. Se Y é um subespaço métrico completo de um espaço métrico X, então Y é fechado em X.
2. Se X é um espaço métrico completo e Y é um subconjunto de X, então Y é um subespaço métrico completo se e só se é fechado em X.

13.4. Proposição. Todo o espaço métrico compacto é completo.

13.5. Teorema. Se X é um conjunto e (Y, d) um espaço métrico, então o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ das funções limitadas de X em Y, munido da métrica do supremo

$$\rho(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x))\,;\, x \in X\},$$

é um espaço completo se e só se (Y, d) é completo.

13.6. Proposição. Se (X, d') e (Y, d) são espaços métricos, então o espaço métrico $\mathcal{C}(X, Y)$ das funções limitadas e contínuas de (X, d) em (Y, d'), munido da métrica do supremo, é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(X, Y)$.

13.7. Corolário. Se (Y, d') é um espaço métrico completo e (X, d) é um espaço métrico qualquer, então $\mathcal{C}(X, Y)$ é um espaço métrico completo.

13.8. Observação. Se considerarmos o seguinte subespaço de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})\,;\, \rho(f, g) \leq 1\}$$

onde g é a função nula, então A é completo e limitado, mas não é compacto.

14. Espaços métricos compactos e funções uniformemente contínuas

Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos.

14.1. Definição. Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ diz-se uniformemente contínua se

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists \delta > 0)\ \ :\ \ (\forall x, x' \in X)\ \ d(x, x') < \delta\ \ \Rightarrow\ \ d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

14.2. Proposição. A composição de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.

14.3. Teorema. Se (X, d) é um espaço métrico compacto e $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma função contínua, então f é uniformemente contínua.

14.4. Definição. Duas métricas d e d' em X dizem-se uniformemente equivalentes se as funções identidade $(X, d) \to (X, d')$ e $(X, d') \to (X, d)$ forem funções uniformemente contínuas.

Dizemos também que os espaços (X, d) e (X, d') são uniformemente equivalentes.

14.5. Exemplo. Sejam d_1, d_2 e d_∞ as métricas em $\mathbb{R}^2$ definidas no Exemplo 1.3.2. Os espaços métricos $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ e $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ são uniformemente equivalentes.

15. Teorema do Ponto Fixo de Banach

15.1. Definição. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : (X, d) \to (X, d)$ uma função. Diz-se que $x_0 \in X$ é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$.

15.2. Lema. Sejam (X, d) um espaço métrico, $f : (X, d) \to (X, d)$ uma função contínua e $x_0 \in X$. A sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n := f(x_{n-1})$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, se for convergente, tem como limite um ponto fixo de f.

15.3. Definição. Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ diz-se uma contracção se existir uma constante $k \in]0, 1[$ tal que

$$(\forall x, x' \in X) \;\; d'(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x').$$

15.4. Teorema do Ponto Fixo de Banach.
Se (X, d) é um espaço métrico completo e $f : (X, d) \to (X, d)$ uma contracção, então f tem um e um só ponto fixo.

15.5. Exercícios.

1. Seja $f :]0, \frac{1}{4}[\to]0, \frac{1}{4}[$ definida por $f(x) = x^2$. Mostre que f é uma contracção mas não tem nenhum ponto fixo.

2. Considere a função $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ definida por $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Mostre que, se $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ e que f não tem nenhum ponto fixo, embora o espaço $[1, +\infty[$ seja completo.

3. Aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, prove que a equação $\sqrt{2 + \sqrt{x}} = x$ tem uma única solução em $[1, +\infty[$.