1 Espaços Métricos

EXERCÍCIOS[1]

(1) (a) Verifique se $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma métrica em $\mathbb{R}$:

(i). $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 + |x-y| & \text{se } x \neq y \end{cases}$

(ii). $d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$

(iii). $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

(iv). $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.

(b) Descreva as bolas abertas para cada uma das métricas da alínea anterior.

(2) Seja (X, d') um espaço métrico. Verifique quais das funções $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ definidas em seguida são métricas em X:

(a) $d(x,y) = k\, d'(x,y)$ para algum número real $k > 0$;

(b) $d(x,y) = \min\{1, d'(x,y)\}$;

(c) $d(x,y) = (d'(x,y))^2$;

(d) (*) $d(x,y) = \frac{d'(x,y)}{1+d'(x,y)}$.

(3) No conjunto das funções reais contínuas definidas em $[0,1]$ considere as métricas ρ do supremo e σ do integral.

(a) Calcule, para cada uma dessas métricas, $d(\sin x, \cos x)$, $d(x^2, x)$ e $d(1-x, x^2)$.

(b) Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ e $g(x) = x$. Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$ e a $B_1(g)$ para a métrica ρ.

(c) Poderá dar uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções de $B_1(f)$ (ou de $B_1(g)$) para a métrica σ? Justifique.

(4) No conjunto das funções reais e limitadas de domínio $[0,1[$ considere a métrica ρ do supremo. Considere as funções

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} g : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

[1]Sempre que nada for dito em contrário, consideraremos $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana. Assinalam-se com (*) os exercícios de resolução eventualmente mais elaborada.

(a) Calcule $\rho(f,g)$. Qual a condição menos restrictiva que se deve impôr ao número real δ para que $g \in B_\delta(f)$?

(b) Seja $F = [0,1[\times]-1,1[$. O gráfico de g está contido em F?

(c) Compare, relativamente a funções limitadas $h : [0,1[\to \mathbb{R}$, as duas condições seguintes:

i. $h \in B_1(f)$; ii. $Gr(h) \subseteq F$.

(d) Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$.

(5) Sejam (X,d) um espaço métrico e x e y elementos de X.

(a) Prove que, se x e y forem distintos, existem bolas abertas disjuntas B e B' tais que $x \in B$ e $y \in B'$.

(b) Sejam r e s números reais positivos tais que $B_r(x) = B_s(y)$. Podemos então concluir que $x = y$ ou que $r = s$? Justifique a sua resposta.

(6) Sejam (X,d) um espaço métrico e a um ponto de X. Mostre que:

(a) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$; (b) $\{a\} = \bigcap_{r>0} B_r(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a)$;

(c) $B_r[a] = \bigcap_{s>r} B_s(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r+\frac{1}{n}}(a)$; (d) $B_r(a) = \bigcup_{0<s<r} B_s[a]$.

(7) Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos:

(a) $\mathbb{N}$; (b) $[1,2[\cup]2,3[$; (c) $\{0\} \cup \{x; x^2 > 2\}$;

(d) $\mathbb{Q}$; (e) $[5,7] \cup \{8\}$; (f) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

(8) Verifique se os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$:

(a) $]0,1[\times]0,1[$; (b) $[0,1[\times]0,1[$; (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$; (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}^2$.

(9) (*) Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ o espaço métrico das funções contínuas e limitadas, de X em $\mathbb{R}$, munido da métrica do supremo. Considere o subconjunto
$A = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, \forall x \in X \;\; f(x) > 0\}$ de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Mostre que:

(a) se $X = [0,1]$, então A é aberto.

(b) se $X =]0,1]$, então A não é aberto.

(10) Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 + |x| & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Note que esta função é descontínua para a métrica usual em $\mathbb{R}$. Verifique que, se d é a métrica definida no Exercício (1)(a)(i) (pág.1), então a função $f : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

(11) Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual d_1 e a métrica d definida em (1)(a)(ii) (pág.1). Verifique se alguma das funções $f, g : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ é contínua, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

---

2 Espaços Topológicos

EXERCÍCIOS.

(1) Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $X = \{a, b, c, d, e\}$:

(a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$,

(b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$,

(c) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$,

(d) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$.

(2) Mostre que os seguintes conjuntos de partes de $\mathbb{R}$ não são topologias em $\mathbb{R}$:

(a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\,]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$

(b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]q, +\infty[\mid q \in \mathbb{Q}\}$.

(3) Prove que a intersecção de duas topologias num conjunto X ainda é uma topologia em X, mas que a sua união nem sempre é uma topologia em X. O que poderemos dizer acerca da intersecção de uma família qualquer de topologias em X?

(4) Dê exemplo de duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \not\subseteq \mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_2 \not\subseteq \mathcal{T}_1$.

(5) (a) Mostre que as métricas d_1, d_2 e d_∞ definem a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$.

(b) Verifique quais das métricas d definidas no Exercício (2) (pág.1) são topologicamente equivalentes a d'.

(c) Compare as topologias definidas em $\mathbb{R}$ pelas métricas do Exercício (1) (pág.1).

(6) (*) Considere, no conjunto $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, as métricas ρ do supremo e σ do integral.

(a) Sendo $0 < r \leq 2$, considere a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{r} + 4 & \text{se } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{r}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Mostre que $g \in B_r^\sigma(f) \setminus B_1^\rho(f)$, onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2$.

(b) Conclua que ρ e σ não são topologicamente equivalentes.

(c) Mostre que $\mathcal{T}^\sigma \subset \mathcal{T}^\rho$.

(7) Mostre que todo o subespaço de um espaço discreto é discreto.

(8) Seja $\mathcal{T}$ a topologia usual em $\mathbb{R}$.

(a) Determine a topologia relativa $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ no conjunto $\mathbb{N}$.

(b) Verifique se cada um dos seguintes subconjuntos de $[0,1]$ é aberto em $[0,1]$:

i. $]\frac{1}{2},1]$; ii. $]\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$; iii. $]0,\frac{1}{2}]$.

(9) Considere o conjunto $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]a,+\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia relativa de $[0,1]$ induzida por $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

(10) Considere o conjunto $\mathcal{T}_0 = \{A \,|\, A \subseteq]-\infty,0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}_0$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia induzida por $\mathcal{T}_0$ em $]-\infty,0]$, $]0,+\infty[$ e $[0,+\infty[$.

(11) Prove que, se $f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua, também o é $f:(X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}_1')$ sempre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_1' \subseteq \mathcal{T}'$.

(12) Prove que, se $f: X \to Y$ é constante, então f é contínua em relação a quaisquer topologias $\mathcal{T}_1$ em X e $\mathcal{T}_2$ em Y.

(13) Considere a topologia $\mathcal{T}$ definida no Exercício (9). Verifique se as funções $f,g:(\mathbb{R},\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T})$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$ são contínuas.

(14) Verifique se as funções $f,g:(\mathbb{R},\mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$, com $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$ são contínuas, onde $\mathcal{T}_0$ é a topologia definida no Exercício (10).

(15) Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Mostre que, se toda a função $f:(X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X.

(16) Sejam $f:(X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ uma função contínua, A um subconjunto de X e f_A a restrição de f a A.

(a) Mostre que, se $\mathcal{T}_A$ é a topologia relativa definida em A por $\mathcal{T}$, então $f_A:(A,\mathcal{T}_A) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua.

(b) Encontre um exemplo que mostre que o resultado recíproco é falso.

(17) Mostre que:

(a) O intervalo $[a,b]$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$) é homeomorfo ao intervalo $[0,1]$.

(b) Qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

(c) O intervalo $[0,1]$ não é homeomorfo ao intervalo $]0,1]$.

3 Bases e sub-bases

EXERCÍCIOS.

(1) Mostre que $\mathcal{B} = \{]r, s[\,;\, r, s \in \mathbb{Q},\ r < s\}$ é uma base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.

(2) Verifique se $\mathcal{S} = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}\}$ é uma base para uma topologia em $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e, em caso afirmativo, determine essa topologia.

(3) Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Construa a topologia gerada por $\mathcal{U}$ quando:

(a) $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}\}$; (b) $\mathcal{U} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, e\}\}$.

(4) Determine a topologia em $\mathbb{R}$ gerada por $\mathcal{S} = \{[x, x + 1]; x \in \mathbb{R}\}$.

(5) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual $\mathcal{T}$ e a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base

$$\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Mostre que $\mathcal{T}$ é menos fina do que $\mathcal{T}'$.

(6) Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $f : X \to [0, 1]$ uma aplicação. Mostre que, se $f^{-1}(]a, 1])$ e $f^{-1}([0, b[)$ são abertos de X para todo o $a, b \in]0, 1[$, então f é contínua.

(7) Seja X um espaço topológico. Mostre que, para que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua é necessário que os conjuntos $\{x \in X : f(x) > 0\}$ e $\{x \in X : f(x) < 0\}$ sejam abertos. Será suficiente?

(8) Considere o conjunto $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-a, a) | a \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}_0$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Verifique se $\{(-a, a) | a \in \mathbb{Q}\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}_0$.

(c) Considere as funções $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$. Designando por $\mathcal{T}$ a topologia euclidiana, verifique se são contínuas quando:

(i). $f, g \colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$;

(ii). $f, g \colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$;

(iii). $f, g \colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
