1 ESPAÇOS MÉTRICOS

Espaço Métrico

Um par (X, d) diz-se um espaço métrico se X for um conjunto e $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ for uma aplicação que verifica as seguintes condições, quaisquer que sejam $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

[À função d chama-se métrica e aos elementos de X pontos do espaço métrico; a condição (3) designa-se por desigualdade triangular.]

Note que, ao verificar (3), basta-nos considerar três pontos distintos $x, y, z \in X$, uma vez que, se dois deles coincidirem, o resultado é trivial ou segue imediatamente de (1).

Bola Aberta e Bola Fechada

Dados um (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$, os conjuntos

$$B_r(a) := \{x \in X \,;\, d(x, a) < r\} \quad \text{e} \quad B_r[a] := \{x \in X \,;\, d(x, a) \leq r\}$$

designam-se, respectivamente, por bola aberta e bola fechada de centro a e raio r.

Exemplos.

(1) Se X é um conjunto, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, definida por $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{caso contrário,} \end{cases}$ é uma métrica. [métrica discreta]

(2) Em $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ podemos definir diversas métricas:

(a) $d_1(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$,

(b) $d_2(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$, [métrica euclidiana]

(c) $d_\infty(a, b) = \max\{|a_i - b_i| \,;\, i = 1, \cdots, n\}$,

onde $a = (a_i)_{i=1,\cdots,n}$, $b = (b_i)_{i=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^n$.

(3) Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos, podemos definir em $X \times Y$ as métricas

(a) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$,

(b) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left(d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(c) $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$,

onde (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \times Y$.

(4) Se A é um subconjunto de X e d é uma métrica em X, a restrição d_A de d a $A \times A$ é uma métrica em A.

[Diz-se então que (A, d_A) é um subespaço métrico de (X, d).]

(5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. No conjunto das funções limitadas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ podemos considerar a métrica ρ definida por

$$\rho(f, g) := \sup \{|f(x) - g(x)| \,;\, x \in [a, b]\},$$

onde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções limitadas.

[Esta métrica chama-se habitualmente métrica do supremo, e o espaço métrico designa-se por $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{R})$.]

(6) Como toda a função contínua de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada, podemos considerar ainda o subespaço métrico de $\mathcal{L}([a, b], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, que se costuma denotar por $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, ou simplesmente por $\mathcal{C}[a, b]$.

(7) No conjunto das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ podemos ainda considerar a métrica

$$\sigma(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

[métrica do integral]

Conjunto Limitado/Função Limitada

Um subconjunto A de um espaço métrico (Y, d) diz-se limitado se existirem $a \in Y$ e $r > 0$ tais que $d(y, a) < r$ qualquer que seja $y \in A$. Uma função $f : X \to (Y, d)$ diz-se limitada se $f(X)$ for um subconjunto limitado de (Y, d).

Exemplo.

(8) Se X é um conjunto e (Y, d) um espaço métrico, podemos considerar o espaço métrico $\mathcal{L}(X, (Y, d))$ das funções limitadas de X em (Y, d) munido da métrica do supremo

$$\rho(f, g) := \sup \{d(f(x), g(x)) \,;\, x \in X\}.$$

Função Contínua

Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Diz-se que $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma função contínua em $a \in X$ se

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \ \ : \ \ (\forall x \in X) \ \ d(x, a) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

$f : (X, d) \to (Y, d')$ diz-se uma função contínua se for contínua em todo o ponto x de X.

Na definição de função contínua em $a \in X$ as bolas abertas são essenciais. De facto:

[Uma função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \ \ : \ \ f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)).]$$

As bolas abertas têm uma propriedade interessante:

Se $x \in B_r(a)$ então existe $s > 0$ tal que $B_s(x) \subseteq B_r(a)$.

Aberto

Se (X, d) é um espaço métrico e $A \subseteq X$, A diz-se um subconjunto aberto de (X, d) se

$$(\forall x \in A) \ \ (\exists s > 0) \ \ : \ \ B_s(x) \subseteq A.$$

Já sabemos que toda a bola aberta é um aberto. Há no entanto abertos que não são bolas abertas. Por exemplo, $]0, +\infty[$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ (com a métrica euclidiana) embora não seja uma bola aberta.

É fácil verificar que os abertos de um espaço métrico (X, d) têm as seguintes propriedades:

(1) $\emptyset$ e X são subconjuntos abertos de (X, d);

(2) se A e B são subconjuntos abertos de (X, d), então também $A \cap B$ o é;

(3) se I é um conjunto e $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de (X, d), então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é ainda um aberto de (X, d).

Note-se que, uma vez que a intersecção de dois abertos é um aberto (Propriedade 2), também qualquer intersecção *finita* de abertos é um aberto. Não podemos no entanto generalizar esta propriedade ao caso de uma família qualquer de abertos: há famílias (infinitas) de abertos cuja intersecção não é aberta. Por exemplo, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$ não é um aberto em $\mathbb{R}$.

Proposição. *Um subconjunto de um espaço métrico é aberto se e só se é reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Como cada bola aberta é um aberto e estes são estáveis para a reunião, conclui-se imediatamente que a reunião de bolas abertas é aberta.

Reciprocamente, se $A \subseteq X$ é aberto, então, para cada $a \in A$, existe $\delta_a > 0$ tal que $B_{\delta_a}(a) \subseteq A$. Logo $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{a \in A} B_{\delta_a}(a) \subseteq A$, e obtemos a igualdade pretendida. ∎

O estudo dos subconjuntos abertos de um espaço métrico é justificado pelo seguinte resultado.

Proposição. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.*

(1) *$f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua em $a \in X$ se e só se, para cada subconjunto aberto V de (Y, d') ao qual $f(a)$ pertença, existir um aberto U de (X, d) tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq V$.*

(2) *A função $f : (X, d) \to (Y, d')$ é contínua se e só se todo o subconjunto aberto de (Y, d') tiver como imagem inversa por f um subconjunto aberto de (X, d).*

Demonstração. (1) ($\Rightarrow$) Seja V um aberto de Y ao qual $f(a)$ pertence. Por definição de aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Da continuidade de f em a conclui-se então que existe $\delta > 0$

tal que $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, considerando $U = B_\delta(a)$, obtemos $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$, como pretendido.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. A bola aberta $B_\varepsilon(f(a))$ é em particular um aberto ao qual $f(a)$ pertence. Logo, por hipótese, existe um aberto U de X tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Por definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq U$. Finalmente temos $f(B_\delta(a)) \subseteq f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$.

(2) ($\Rightarrow$) Sejam V um subconjunto aberto de Y e $a \in f^{-1}(V)$. Como V é aberto e $f(a) \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$ e podemos então concluir que $f^{-1}(V)$ é um aberto de X.

($\Leftarrow$) Sejam $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $B_\varepsilon(f(a))$ é um aberto de Y, da hipótese segue que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ é um aberto de X. Como $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, pela definição de aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, o que é equivalente a $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Logo, f é contínua em a. ∎

---

2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

TOPOLOGIA

Dado um conjunto X, um subconjunto $\mathcal{T}$ de partes de X diz-se uma topologia em X se

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;

(2) se $A, B \in \mathcal{T}$ então $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(3) se $(A_i)_{i\in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$, então $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

[Ao par $(X, \mathcal{T})$ chama-se espaço topológico. Os elementos de $\mathcal{T}$ dizem-se os abertos do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.]

FUNÇÃO CONTÍNUA

Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $f : X \to Y$ é uma *função*, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$

(1) diz-se contínua em $a \in X$ se: $(\forall V \in \mathcal{T}')\ \ f(a) \in V \ \Rightarrow\ (\exists U \in \mathcal{T}) \ :\ a \in U$ e $f(U) \subseteq V$;

(2) diz-se contínua se: $(\forall V \in \mathcal{T}')\ \ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ e $(Z, \mathcal{T}'')$ são espaços topológicos e $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ e $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ são funções contínuas, então a sua composição $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ é ainda uma função contínua.*

EXEMPLOS.

(1) Se (X, d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é o conjunto dos abertos definidos pela métrica d, então $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico. Por exemplo, a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$ define uma topologia em $\mathbb{R}^n$, a que se chama topologia euclidiana.

(2) Em qualquer conjunto X podemos definir:

  (a) a topologia discreta $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, em que todo o subconjunto de X é aberto (induzida pela métrica discreta);

  (b) a topologia indiscreta (ou topologia grosseira) $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$.

(3) Se X é um conjunto qualquer, $\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ é um conjunto finito}\}$ é uma topologia em X, a que se dá o nome de topologia cofinita.

(4) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dado um subconjunto Y de X, $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \,;\, U \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em Y. A esta topologia chama-se topologia relativa – ou topologia de subespaço – em Y induzida por $\mathcal{T}$.

ESPAÇO TOPOLÓGICO METRIZÁVEL

Um espaço topológico cuja topologia seja exactamente o conjunto dos abertos definidos por uma métrica diz-se um espaço topológico metrizável.

[Note-se que: Duas métricas diferentes num conjunto X podem definir a mesma topologia: métricas topologicamente equivalentes.]

Proposição. *Se d e d' são métricas num conjunto X, d e d' são topologicamente equivalentes se e só se as funções* $\begin{array}{ccc} (X,d) & \longrightarrow & (X,d') \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ *e* $\begin{array}{ccc} (X,d') & \longrightarrow & (X,d) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ *são contínuas.*

Lema. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ é a topologia de subespaço em $Y \subseteq X$, então a função inclusão* $\begin{array}{ccc} (Y,\mathcal{T}_Y) & \longrightarrow & (X,\mathcal{T}) \\ y & \longmapsto & y \end{array}$ *é contínua.*

Proposição. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.*

(1) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

(2) Se $\mathcal{T}'$ é a topologia indiscreta, $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

TOPOLOGIAS COMPARÁVEIS

No conjunto das topologias de um conjunto X podemos definir uma relação de ordem do seguinte modo: se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Nesse caso diz-se que $\mathcal{T}$ é uma topologia menos fina do que $\mathcal{T}'$ e que $\mathcal{T}'$ é uma topologia mais fina do que $\mathcal{T}$.

OBSERVAÇÕES.

(1) Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ são topologias em X, dizer que $\mathcal{T}$ é mais fina do que $\mathcal{T}'$ é equivalente a dizer que a função identidade $(X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ é contínua.

(2) A topologia discreta é mais fina do que qualquer outra topologia que se possa definir no conjunto X, enquanto que a topologia indiscreta é menos fina do que qualquer outra.

HOMEOMORFISMO/ESPAÇOS HOMEOMORFOS

Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos.

(1) Uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se um homeomorfismo se for uma função contínua, bijectiva, com função inversa $g : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ contínua.

(2) Se existir um homeomorfismo $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diz-se que os espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são homeomorfos.

Exemplos. Como subespaços de $\mathbb{R}$, são homeomorfos: $[0,1]$ e $[a,b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$); $]0,1]$ e $[1, +\infty[$; $\mathbb{R}$ e $]0, +\infty[$.

---

3 Bases e sub-bases

BASE

Um subconjunto $\mathcal{B}$ de uma topologia $\mathcal{T}$ num conjunto X diz-se uma base da topologia $\mathcal{T}$ se todo o elemento de $\mathcal{T}$ for uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$; isto é

$$\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i \,|\, (B_i)_{i \in I} \text{ é uma família de elementos de } \mathcal{B}\}.$$

Lema. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, então $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$ se e só se, para todo o aberto A, se verificar* $(\forall x \in A)\ (\exists B \in \mathcal{B}) \ : \ x \in B \subseteq A.$

Exemplos.

(1) Se (X, d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}$ é a topologia definida pela métrica d, então o conjunto $\mathcal{B} = \{B_r(x) \,|\, r > 0, \ x \in X\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$.

[Em particular, os intervalos abertos limitados formam uma base para a topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.]

(2) Um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de X é uma base para a topologia discreta em X se e só se, para todo o ponto x de X, $\{x\} \in \mathcal{B}$.

Proposição. *Dados um conjunto X e um subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(X)$, o conjunto $\mathcal{T}$ constituído pelas reuniões quaisquer de intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma topologia em X.*

SUB-BASE

Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ estão nas condições da proposição anterior, diz-se que $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}$, e que $\mathcal{T}$ é a topologia gerada por $\mathcal{S}$.

[A topologia gerada por $\mathcal{S}$ é portanto a topologia menos fina que contém $\mathcal{S}$.]

EXEMPLOS.

(1) Toda a base de uma topologia é em particular uma sub-base.

(2) $\{]a, a+1[\,|\, a \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$ [mas não é uma base].

(3) A topologia euclidiana em $\mathbb{R}$ é gerada por $\mathcal{S} = \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, b[\,;\, b \in \mathbb{R}\}$.

(4) Qualquer que seja X, $\{X \setminus \{x\}\,|\, x \in X\}$ é uma sub-base da topologia cofinita em X.

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ são espaços topológicos e $\mathcal{S}$ é uma sub-base de $\mathcal{T}'$, então uma função $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua se e só se toda a imagem inversa, por f, de um elemento de $\mathcal{S}$ for um aberto em $(X, \mathcal{T})$.*

Proposição. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{S}$ é uma base para uma topologia em X.*

(ii) (B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$;

(B2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{S})\ (\forall x \in B_1 \cap B_2)\ (\exists B_3 \in \mathcal{S})\ :\ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposição. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{T}_Y$ a topologia relativa em $Y \subseteq X$.*

(1) Se $\mathcal{B}$ é base da topologia $\mathcal{T}$, então $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y\,;\, B \in \mathcal{B}\}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}_Y$.

(2) Se $\mathcal{S}$ é sub-base de $\mathcal{T}$, então $\mathcal{S}_Y := \{S \cap Y\,;\, S \in \mathcal{S}\}$ é uma sub-base da topologia $\mathcal{T}_Y$.

---

4 Vizinhanças

VIZINHANÇA
Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e a um ponto de X. Diz-se que um subconjunto V de X é uma vizinhança de a se existir um aberto A tal que $a \in A \subseteq V$.

Designaremos o conjunto das vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$ por $\mathcal{V}_x$.

EXEMPLOS. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

(1) Qualquer que seja $x \in X$, $X \in \mathcal{V}_x$.

(2) Se A é aberto e $x \in A$, então $A \in \mathcal{V}_x$.

(3) Se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta, então, quaisquer que sejam $Y \subseteq X$ e $x \in Y$, $Y \in \mathcal{V}_y$.

Proposição. *Um conjunto $A \subseteq X$ é aberto se e só se é vizinhança de todos os seus pontos.*

Proposição. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $x \in X$, então:*

(1) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ *e* $V \in \mathcal{V}_x \;\Rightarrow\; x \in V$*;*

(2) $V \in \mathcal{V}_x$ *e* $W \supseteq V \;\Rightarrow\; W \in \mathcal{V}_x$*;*

(3) $V, W \in \mathcal{V}_x \;\Rightarrow\; V \cap W \in \mathcal{V}_x$*;*

Proposição. *Seja* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ *uma função.*

(1) f *é contínua em* $a \in X$ *se e só se a imagem inversa por* f *de qualquer vizinhança de* $f(a)$ *é uma vizinhança de* a*.*

(2) f *é contínua se e só se, para todo o* $x \in X$*, a imagem inversa por* f *de qualquer vizinhança de* $f(x)$ *é uma vizinhança de* x*.*

SISTEMA FUNDAMENTAL DE VIZINHANÇAS
Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $x \in X$. Um subconjunto $\mathcal{U}_x$ de $\mathcal{V}_x$ diz-se uma base de vizinhanças de x ou sistema fundamental de vizinhanças de x se, para cada $V \in \mathcal{V}_x$, existir $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \subseteq V$.

Exemplos.

(1) Se $\mathcal{T}$ for uma topologia em X definida por uma métrica d, então o conjunto das bolas abertas centradas em $x \in X$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

(2) Se $\mathcal{T}$ for a topologia discreta em X, então o conjunto singular $\mathcal{U}_x = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $x \in X$.

Proposição. *Sejam* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico e* $\mathcal{T}_Y$ *a topologia relativa em* $Y \subseteq X$*.*

(1) Se $x \in Y$ *e* $\mathcal{V}_x$ *é o conjunto das vizinhanças de* x *no espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$*, então* $\mathcal{V}'_x := \{V \cap Y \,;\, V \in \mathcal{V}_x\}$ *é o conjunto das vizinhanças de* x *em* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*.*

(2) Se $x \in Y$ *e* $\mathcal{U}_x$ *é um sistema fundamental de vizinhanças de* x *no espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$*, então* $\mathcal{U}'_x := \{U \cap Y \,;\, U \in \mathcal{U}_x\}$ *é um sistema fundamental de vizinhanças de* x *em* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*.*

---

5 Subconjuntos fechados de um espaço topológico

FECHADO
Um subconjunto A de um espaço $(X, \mathcal{T})$ chama-se fechado se o seu complementar for aberto.

Proposição. *Um subconjunto* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{P}(X)$ *é o conjunto dos subconjuntos fechados de um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *se e só se verifica as seguintes condições:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ *e* $X \in \mathcal{F}$*;*