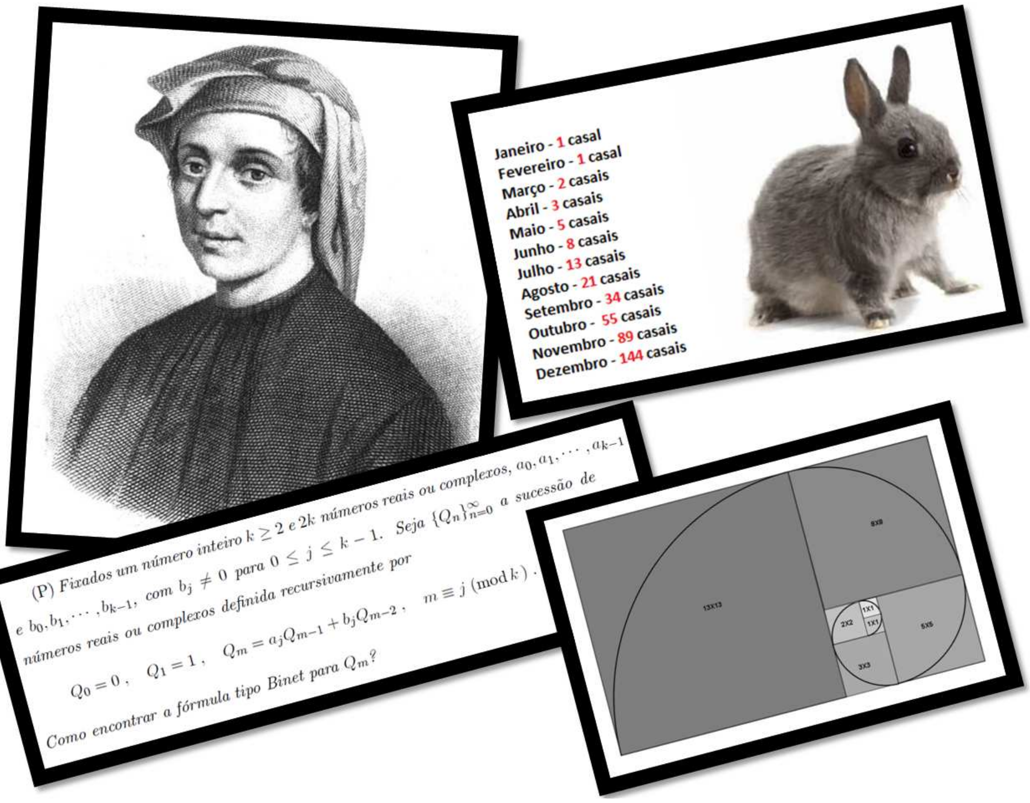

Sucessão de Fibonacci e uma sua generalização

Márcio Dinis do Nascimento de Jesus

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Sucessão de Fibonacci e uma sua generalização

Márcio Dinis do Nascimento de Jesus

PROJETO EDUCACIONAL I do Mestrado em Ensino de Matemática
no 3^o ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Professor Doutor Armando Gonçalves

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns resultados sobre a sucessão de Fibonacci $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. O termo geral desta sucessão, F_n, é chamado número de Fibonacci de ordem n e é definido recursivamente por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$ com condições iniciais $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Ao longo dos tempos, surgiram na literatura diversas generalizações desta sucessão. Neste trabalho apresentamos uma dessas generalizações, recentemente estudada por J. Petronilho em [11]. Terminamos o trabalho deduzindo a função geradora desta sucessão de Fibonacci generalizada.

Palavras Chave: Sucessão de Fibonacci, Sucessão de Fibonacci generalizada,

Fórmula de Binet, Função geradora.

Abstract

In this work we present some results on the Fibonacci sequence $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. The general term, F_n, is denoted by Fibonacci number of order n and it is defined recursively by $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$ with initial conditions $F_1 = 1$ and $F_2 = 2$. Over time, several generalizations of this sequence have appeared in the literature. In this work we present one of these generalizations, studied recently by J. Petronilho in [11]. The generating function of this generalized Fibonacci sequence will be deduced.

Keywords: Fibonacci sequence, Generalized Fibonacci sequence, Binet formula,

Generating function.

Índice

A sucessão de Fibonacci e uma sua generalização

A sucessão de Fibonacci aparece pela primeira vez referenciada no livro *"Liber Abaci"*, publicado por Fibonacci em 1202, sob a forma de um problema [13, 16]:

"Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida?"

Este problema tem uma resolução simples, admitindo que todos os coelhos são imortais. De facto, no primeiro mês, existe apenas o par inicial. No segundo mês, este ficou mais maduro mas sem estar ainda na fase reprodutiva. No terceiro mês, nasceu outro par. No quarto mês, o par inicial teve outro par, enquanto os seus primeiros filhos cresciam. No quinto mês, tanto o par inicial como os seus primeiros filhos, já em fase reprodutiva, tiveram dois novos pares de coelhos, e assim sucessivamente. A sucessão que se origina é

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots . \tag{1.1}$$

A sucessão (1.1) é conhecida na literatura por sucessão de Fibonacci e os seus termos são chamados números de Fibonacci. Os números de Fibonacci, além de aparecerem em diversas áreas da matemática, tais como teoria dos números [16], teoria de grafos [1, 4], em algumas áreas da álgebra [14], também aparecem noutras áreas bem distintas, tais como finanças, arte, arquitetura, música, entre outras (veja-se, por exemplo, [18]).

Devido à sua frequência na natureza e em diversas áreas do conhecimento, esta sucessão tem despertado, ao longo da história, algum interesse por parte de matemáticos e não só. Nos últimos anos apareceram na literatura várias generalizações da sucessão de Fibonacci, dos quais destacamos os trabalhos de M. Edson e O. Yayenie [5], J. Feng [7], M. Sahin [12], O. Yayenie [17] e, muito recentemente, o trabalho de J. Petronilho [11].

Este Projeto Educacional I está organizado da forma descrita a seguir. Na secção 1.1, apresentamos alguns resultados simples relacionados com os números de Fibonacci. Como aplicação dos resultados apresentados, mostramos que a equação de Diophantine, $x^2 + xy - y^2 = \pm 1$, tem infinitas soluções. Na secção 1.2, apresentamos e deduzimos a fórmula de Binet para os números de Fibonacci, evidenciando algumas aplicações da mesma, nomeadamente à generalização da fórmula de Cassini, conhecida na literatura por fórmula de Catalan. Relacionam-se, ainda, os números de Fibonacci com as triplas pitagóricas e apresenta-se uma demonstração (simples) que utiliza os números de Fibonacci para mostrar que existem infinitos números primos (um facto universalmente conhecido!). Na secção 1.3, recordamos a definição de número de ouro e relacionamos este número com a sucessão de Fibonacci. Na secção 1.4, apresentamos uma generalização da sucessão de Fibonacci, estudada por J.Petronilho em [11], utilizando a teoria dos polinómios ortogonais. Terminamos este trabalho com a secção 1.5, onde se deduz a função geradora da sucessão de Fibonacci generalizada.

1.1. Números de Fibonacci e algumas propriedades

Ao longo deste trabalho, e como é usual, a sucessão (1.1) será designada por $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Decorre do exposto anteriormente, que a sucessão de Fibonacci pode ser definida por recorrência, sendo cada termo, com exceção dos dois primeiros termos, a soma dos dois termos que o precedem, isto é,

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n = 3, 4, 5, \ldots . \tag{1.2}$$

Por conveniência, algumas vezes neste trabalho será útil considerar $F_0 = 0$.

Utilizando a relação de recorrência satisfeita pelos números de Fibonacci, com condições iniciais diferentes das indicadas anteriormente, podemos construir novas sucessões numéricas. Por exemplo, definido recursivamente a sucessão $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$L_1 = 1,\ L_2 = 3 \text{ e } L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ n = 3, 4, 5, \ldots \tag{1.3}$$

obtém-se a sucessão de Lucas, em homenagem ao matemático Edouard Lucas (1842-1891). Os termos desta sucessão serão denotados por números de Lucas.

Utilizando o princípio da indução matemática, demonstra-se facilmente que os números de Lucas e os números de Fibonacci estão relacionados pela seguinte identidade:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1},\ n \in \mathbb{N} . \tag{1.4}$$

Seguidamente apresentamos algumas propriedades elementares dos números de Fibonacci, bem como algumas ligações existentes entre estes números e diversas áreas da matemática.

Proposição 1.1. *Os números de Fibonacci satisfazem:*

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1;$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n};$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1;$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Demonstração. Usaremos o princípio da indução matemática. Apenas iremos demonstrar (a), pois de forma análoga se demonstram as restantes igualdades. Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^{1} F_k = F_1 = 1$ e $F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. Suponhamos que a igualdade (a) se verifica para um número inteiro positivo m e mostremos que, para o sucessor de m, $m + 1$, ela também é verdadeira. De facto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} F_k &= \sum_{k=1}^{m} F_k + F_{m+1} \overset{H.I}{=} (F_{m+2} - 1) + F_{m+1} \\ &= F_{m+2} + F_{m+1} - 1 \overset{(1.2)}{=} F_{m+3} - 1 \\ &= F_{(m+1)+2} - 1 \end{aligned}$$

□

Observação 1.2. *Justapondo dois quadrados com medida de comprimento de lado igual a* 1*, obtém-se um retângulo do tipo* 2×1 *(isto é, tal que as medidas dos comprimentos dos lados são* 2 *e* 1*), sendo a medida de comprimento do maior lado igual à soma das medidas dos comprimentos dos lados dos quadrados iniciais. Justapondo agora outro quadrado com medida de comprimento de lado igual a* 2 *(a medida de comprimento do maior lado do retângulo* 2×1*), teremos um retângulo* 3×2*. Continuando a justapor quadrados com medidas de comprimento de lados iguais à maior das medidas dos comprimentos dos lados dos retângulos obtidos no passo anterior, obtemos uma construção onde se pode verificar geometricamente a propriedade (d) da Proposição anterior. A Figura 1 ilustra o procedimento descrito.*

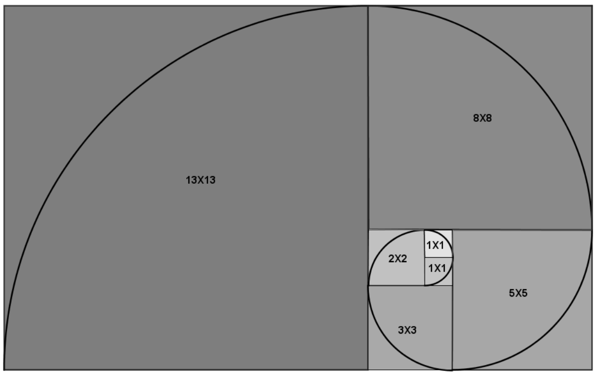

Figura 1: Espiral de Fibonacci

Unindo-se os arcos (quartos) de circunferência que se obtêm dos quadrados unindo adequadamente vértices opostos destes, constrói-se uma espiral, designada por Espiral de Fibonacci. *Verifica-se, facilmente, utilizando a Proposição 1.1 (a), que a medida do comprimento da espiral de Fibonacci, construída a partir dos n primeiros quadrados (com medidas de comprimento de lados iguais aos primeiros n números de Fibonacci) é* $\frac{\pi}{2}(F_{n+2}-1)$.

Teorema 1.3. *Sejam n e k dois números inteiros positivos. Entre as potências consecutivas n^k e n^{k+1} não existem mais do que n números de Fibonacci.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que entre algum n^k e n^{k+1} existem pelo menos $n+1$ números de Fibonacci. Assim,

$$n^k < F_{r+1}, F_{r+2}, F_{r+3}, \ldots, F_{r+n+1}, \ldots < n^{k+1} .$$

Pela Proposição 1.1 (a), a soma dos primeiros $n-1$ desses números é

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} F_{r+k} &= \textstyle\sum_{k=1}^{r+n-1} F_k - \sum_{k=1}^{r} F_k \\ &= F_{r+n+1} - 1 - (F_{r+2}-1) \\ &= F_{r+n+1} - F_{r+2} .\end{aligned}$$

Logo, $F_{r+n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_{r+k} + F_{r+2}$ o que representa a soma de n números de Fibonacci, sendo que cada um deles é maior que n^k. Portanto, $F_{r+n+1} > nn^k = n^{k+1}$, facto que contraria a hipótese. □

Teorema 1.4. *Todo o número inteiro positivo pode ser expresso como uma soma de números de Fibonacci distintos.*

Demonstração. Seja n um número inteiro positivo e F_m o maior número de Fibonacci menor ou igual a n. Então $n = F_m + n_1$, onde $n_1 \leq F_m$. Seja F_{m_1} o maior número de Fibonacci menor ou igual a n_1. Então $n = F_m + F_{m_1} + n_2$, onde $n \geq F_m > F_{m_1}$. Continuando este processo obtemos $n = F_m + F_{m_1} + F_{m_2} + \ldots$, onde $n \geq F_m > F_{m_1} > F_{m_2} > \ldots$. Uma vez que se trata de uma sucessão decrescente de números inteiros positivos, esta deve terminar, concluindo-se o resultado. $\square$

Teorema 1.5. [Fórmula de Cassini] *Os números de Fibonacci satisfazem*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.5}$$

Demonstração. Usaremos o princípio da indução matemática. Para $n = 1$, (1.5) verifica-se: de facto, $F_0F_2 - F_1^2 = 0.1 - 1 = -1 = (-1)^1$. Admita-se, agora, que (1.5) se verifica para algum número inteiro positivo $n = k$. Então

$$\begin{aligned} F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &\overset{(1.2)}{=} (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}^2 \\ &= F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 - F_kF_{k-1} - F_{k-1}F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\ &\overset{H.I}{=} F_kF_{k+1} - F_kF_{k-1} - F_k^2 - (-1)^k \\ &= F_kF_{k+1} - F_k(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1} \\ &\overset{(1.2)}{=} F_kF_{k+1} - F_kF_{k+1} + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}\,. \end{aligned}$$

Assim, (1.5) verifica-se para $n = k+1$ e portanto, pelo princípio da indução matemática, verifica-se para todo o número inteiro positivo n. $\square$

Corolário 1.6. *Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

Demonstração. Suponha-se, por absurdo, que existe um factor primo p de ambos os números de Fibonacci F_n e F_{n+1}. Então, pela fórmula de Cassini, p divide ± 1, o que é um absurdo. Logo F_n e F_{n+1} são primos entre si. $\square$

Corolário 1.7. *Os números de Lucas e de Fibonacci satisfazem a identidade*

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.6}$$

Demonstração. Notando que

$$\begin{aligned} L_n^2 - 4\left[(-1)^n + F_n^2\right] &\overset{(1.4)}{=} (F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4\left[(-1)^n + F_n^2\right] \\ &\overset{(1.5)}{=} (F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4F_{n-1}F_{n+1} \\ &= (F_{n-1} - F_{n+1})^2 \overset{(1.2)}{=} F_n^2\,, \end{aligned}$$

obtém-se (1.6). $\square$

Observação 1.8. *Tendo em conta (1.2) e a fórmula de Cassini, concluímos que*

$$F_{n-1}^2 + F_nF_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n\,,$$

o que permite justificar que a equação de Diophantine $x^2 + xy - y^2 = \pm 1$ tem infinitas soluções.

1.2. A Fórmula de Binet e algumas consequências

O objetivo nesta secção, é determinar uma expressão explícita para F_n. Esta fórmula explícita para F_n é conhecida, na literatura, por fórmula de Binet, em homenagem ao matemático francês Jacques Binet (1786-1856), que a descobriu em 1843.

Para determinarmos explicitamente os números de Fibonacci, iremos denotar por

$$\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

as raízes da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$. Prova-se facilmente por indução matemática que $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ e $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Definindo o termo geral da sucessão $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right), \, n \in \mathbb{N}\,,$$

concluímos que $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = 1$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = 1$ e, para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_{n-2} &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right) \\ &= \tfrac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{5}}(\alpha + 1) - \tfrac{\beta^{n-2}}{\sqrt{5}}(\beta + 1) \\ &= \tfrac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{5}}\alpha^2 - \tfrac{\beta^{n-2}}{\sqrt{5}}\beta^2 \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) = u_n\,. \end{aligned}$$

Como a sucessão $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaz a mesma relação de recorrência, com as mesmas condições iniciais, da sucessão de Fibonacci, decorre que $u_n = F_n$.

Assim, concluímos que os números de Fibonacci são dados explicitamente, para todo o $n \in \mathbb{N}$, por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\,. \quad \text{[Fórmula de Binet]} \tag{1.7}$$

Como consequência imediata da Fórmula de Binet, obtém-se a identidade

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}, \, n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.8}$$

Esta fórmula é essencial para justificar a relação existente entre os números de Fibonacci e as chamadas triplas pitagóricas. Esta relação foi obtida em 1984 por Charles Raine [16], que observou que, tomando quaisquer quatro números consecutivos da sucessão de Fibonacci,

$$F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$$

o produto dos termos extremos, F_nF_{n+3}, e duas vezes o produto dos termos internos, $2F_{n+1}F_{n+2}$, representam as medidas dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo, sendo a medida do comprimento da hipotenusa o número de Fibonacci F_{2n+3}. Assim, $(F_nF_{n+3}, 2F_{n+1}F_{n+2}, F_{2n+3})$ é uma tripla pitagórica. Para justificarmos a afirmação anterior, basta notar que por (1.8) e (1.2) é

$$F_{2n+3}^2 = F_n^2F_{n+3}^2 + 4F_{n+1}^2F_{n+2}^2\,.$$

Usando também a fórmula de Binet, podemos generalizar a fórmula de Cassini. Esta generalização foi estabelecida em 1879 pelo matemático Eugène Catalan (1814-1894) e é apresentada no teorema seguinte.

Teorema 1.9. [Fórmula de Catalan] *Seja k um número inteiro positivo. Então*

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2, \quad n \geq k\,. \tag{1.9}$$

Demonstração. A fórmula (1.9) decorre diretamente da Fórmula de Binet e da igualdade $\alpha^{2k} + \beta^{2k} = L_{2k} = 5F_k^2 + 2(-1)^k$. □

Outra consequência da Fórmula de Binet é a identidade

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1},\ n, m \in \mathbb{N}, \tag{1.10}$$

que será essencial na demonstração dos teoremas seguintes.

Teorema 1.10. *Sejam m, n números inteiros positivos. O número de Fibonacci F_m divide o número de Fibonacci F_{mn}, isto é, $F_m|F_{mn}$.*

Demonstração. A prova será feita por indução matemática sobre n. Para $n = 1$ a afirmação é trivial. Vamos assumir que $F_m|F_{mi}$, para $1 \leq i \leq k$, e mostremos que $F_m|F_{m(k+1)}$. Ora, por (1.10), temos

$$F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}\,.$$

Por hipótese de indução $F_m|F_{mk}$ e, portanto, também $F_m|F_{m(k+1)}$.

Teorema 1.11. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $d = m.d.c(m, n)$, então $m.d.c\,(F_m, F_n) = F_d$.*

Demonstração. Seja $d = m.d.c(m, n)$ e $d' = m.d.c\,(F_m, F_n)$. Pelo Teorema 1.10, $F_d|F_m$ e $F_d|F_n$; logo $F_d|d'$. Uma vez que $d = m.d.c(m, n)$, existem inteiros a e b tais que $d = am + bn$. Uma vez que $d, m, n > 0$, então ou $a \leq 0$ ou $b \leq 0$. Seja $a = -k$, onde $k \geq 0$. Então $bn = d + km$. Pela identidade (1.10), temos

$$F_{bn} = F_{d+km} = F_{d-1}F_{km} + F_dF_{km+1}. \tag{1.11}$$

Uma vez que $d'|F_m$, pelo Teorema 1.10, $d'|F_{km}$. Como $d'|F_n$ e $F_n|F_{bn}$, então $d'|F_{bn}$. Assim, $d'|F_{km}$ e $d'|F_{bn}$. Logo, pela equação (1.11), $d'|F_d F_{km+1}$.
Mas, $m.d.c\,(d', F_{km+1}) = 1$, pois $d'|F_{km}$ e $m.d.c\,(F_{km}, F_{km+1}) = 1$ (Corolário 1.6), donde $d'|F_d$. Como $d'|F_d$ e $F_d|d'$, concluímos que $d' = F_d$. □

Corolário 1.12. *Sejam m, n números inteiros positivos. Se m e n são números primos entre si então também são primos entre si os números de Fibonacci F_m e F_n.*

Corolário 1.13. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $F_m|F_n$ então $m|n$.*

Demonstração. Suponhamos que $F_m|F_n$. Então, pelo Teorema 1.11, $m.d.c\,(F_m, F_n) = F_m = F_{m.d.c(m,n)}$. Assim, $m = m.d.c(m, n)$, o que implica que $m|n$. □

Observação 1.14. *Conjugando o Corolário anterior com o Teorema 1.10, podemos concluir que $F_m|F_n$ se e só se $m|n$.*

Em 1965, M. Wunderlich utilizou estes resultados para apresentar uma prova de que existe uma infinidade de números primos [16], facto que é universalmente conhecido. O próximo corolário leva-nos a essa prova.

Corolário 1.15. *Existe uma infinidade de números primos.*

Demonstração. Suponhamos que existe um número finito de números primos, $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Então, os números de Fibonacci $F_{p_1}, F_{p_2}, \ldots, F_{p_k}$, são primos entre si. Uma vez que existem exatamente k números primos, cada um destes números de Fibonacci tem, exatamente, um fator primo, isto é, cada um é um número primo, o que é absurdo. Por exemplo $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$. □

1.3. Números de Fibonacci e o número de ouro

Desde a antiguidade, há um número que vem sendo estudado por matemáticos e curiosos devido às suas extraordinárias propriedades. Este número ficou conhecido por número de ouro e é usualmente denotado pela letra grega Φ, em homenagem ao escultor Phidias (490-430 a.c)– veja-se, por exemplo, [16, 18]. Fibonacci, no seu livro *"De Divina Proportione"*, denominou-o de *"Proporção Divina"*. Já Euclides tinha a noção da sua existência. No Livro VI dos Elementos de Euclides, dá a seguinte definição: *"Um segmento de reta diz-se dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo."* Podemos perceber a proporção mais facilmente, quando dividimos um segmento de reta AB em duas partes (Figura 2), de tal forma que a razão entre o segmento inteiro e a parte mais longa seja a mesma razão entre a parte mais longa e a parte mais curta.

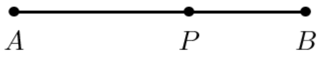

Figura 2: Divisão aurea do segmento $[AB]$

Designando por x a medida de comprimento da parte mais longa e por m a medida de comprimento do segmento inteiro, tem-se $\dfrac{m}{x} = \dfrac{x}{m-x}$. Como $x > 0$, concluímos que $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.m$ e que o número de ouro Φ é dado por

$$\Phi := \frac{m}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Como consequência da definição de número de ouro, obtemos o teorema seguinte:

Teorema 1.16. *Seja $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sucessão de Fibonacci definida por (1.2). Então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$.*

Demonstração. A demonstração é uma consequência imediata da fórmula de Binet (1.7) e do facto de ser $-1 < \dfrac{\beta}{\alpha} < 0$ (com α e β definidos como na Secção 1.2).

□

Observação 1.17. *Decorre facilmente de (1.2) que a função geradora da sucessão de Fibonacci é dada por*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}\,. \tag{1.12}$$

Assim, pelo Teorema 1.16, concluímos que a igualdade (1.12) é válida para $|x| < \frac{1}{\Phi}$.

1.4. Uma generalização da sucessão de Fibonacci

Nesta secção iremos apresentar uma generalização da sucessão de Fibonacci estudada recentemente por J. Petronilho em [11], que consiste em resolver o seguinte problema:

(P) *Fixemos um número inteiro $k \geq 2$ e $2k$ números reais ou complexos, $a_0, a_1, \cdots,$ a_{k-1} e $b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$, com $b_j \neq 0$ para $0 \leq j \leq k-1$. Seja $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ a sucessão de números reais ou complexos definida recursivamente por*

$$Q_0 = 0\,, \quad Q_1 = 1\,, \quad Q_m = a_j Q_{m-1} + b_j Q_{m-2}\,, \quad m \equiv j \pmod{k}\,. \tag{1.13}$$

Como encontrar uma fórmula de tipo Binet para Q_m?

Este problema foi resolvido em [6] e [12], no caso particular de $b_j = 1$ para $0 \le j \le k-1$. Neste caso, M. Sahin [12] determinou a função geradora para $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ e M. Edson, S. Lewis e O. Yayenie [6] além de terem determinado a função geradora, deduziram também uma fórmula tipo Binet para $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$.

O caso $k = 2$ foi resolvido com sucesso por Yayenie em [17]. Uma prova alternativa deste caso foi apresentada por J. Petronilho em [11], utilizando resultados da teoria dos polinómios ortogonais e transformações polinomiais quadráticas estudadas em detalhe por F. Marcellán e J. Petronilho em [9, 10].

Nesta secção iremos apenas apresentar a solução do problema (P), assumindo que $k \ge 3$. Neste caso, J. Petronilho utilizou a teoria dos polinómios ortogonais, bem como uma apropriada transformação polinomial, baseando-se nos resultados contidos em [8]. Para uma melhor leitura e compreensão desta secção, veja-se o Apêndice, onde estão enunciados, sem demonstração, alguns dos resultados da teoria dos polinómios ortogonais, bem como alguns dos resultados principais contidos em [8], que foram fundamentais para a resolução do problema (P).

Para a resolução do problema (P), necessitamos de recordar a sucessão dos polinómios de Chebyshev de segunda espécie, $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, definida pela relação de recorrência

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \ , \quad n \ge 0 \ , \tag{1.14}$$

com condições iniciais $U_{-1}(x) = 0$ e $U_0(x) = 1$.

É bem conhecido (ver (A.5) no Apêndice) que

$$U_n(x) = \frac{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}{r_+ - r_-} \ , \quad n \ge 0 \tag{1.15}$$

onde $r_\pm$ são as raízes da equação quadrática

$$z^2 - 2xz + 1 = 0 \ . \tag{1.16}$$

No que se segue, adotamos as seguintes convenções $a_k := a_0$, $b_k := b_0$, e, define-se

$$\Delta_{\mu,\nu} := \begin{vmatrix} a_\mu & 1 & & & \\ -b_{\mu+1} & a_{\mu+1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{\nu-1} & a_{\nu-1} & 1 \\ & & & -b_\nu & a_\nu \end{vmatrix} \qquad \text{se} \quad 0 \le \mu < \nu \le k$$

(trata-se do determinante de uma matriz tridiagonal) e, no caso $\mu \geq \nu$,

$$\Delta_{\mu,\nu} := \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad \mu > \nu + 1 \\ 1\,, & \text{se} \quad \mu = \nu + 1 \\ a_\mu\,, & \text{se} \quad \mu = \nu\,. \end{cases}$$

Definimos, ainda,

$$\Delta_k := \begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & & 1 \\ -b_3 & a_3 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -b_{k-1} & a_{k-1} & 1 & \\ & & & -b_0 & a_0 & 1 \\ -b_2 & & & & -b_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

(neste determinante, a matriz envolvida é de ordem k, a matriz associada ao menor principal de ordem $k-1$ é tridiagonal, e na última linha e coluna do determinante as entradas que não aparecem são todas nulas).

Teorema 1.18. *Para $k \geq 3$, os termos da sucessão de Fibonacci generalizada $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por (1.13) são dados pela seguinte fórmula do tipo Binet:*

$$Q_{n+1} = \frac{(A_{k,n}\alpha_* + B_{k,n})\ \alpha_*^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} - (A_{k,n}\beta_* + B_{k,n})\ \beta_*^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}}{\alpha_* - \beta_*}\,, \quad n \geq 0\,, \tag{1.17}$$

onde α_* e β_* são as raízes da equação quadrática

$$z^2 + (\,c - \Delta_k\,)\,z + b = 0\,, \tag{1.18}$$

com

$$b := (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} b_i\,, \quad c := (-1)^k\ (\,b_2 + b/b_2\,)\,,$$

$$A_{k,n} := \Delta_{2,1+n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}\,, \quad B_{k,n} := (-1)^{1+n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \left(\prod_{i=2}^{2+n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} b_i\right) \Delta_{3+n-k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor,k}\,. \tag{1.19}$$

Demonstração. Notemos que podemos reescrever (1.13) na forma

$$Q_0 = 0\,, \quad Q_1 = 1\,,$$
$$Q_{kn+j} = a_j Q_{nk+j-1} + b_j Q_{nk+j-2}\,, \quad 0 \leq j \leq k-1\,, \quad n \geq 0\,.$$

Seja $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a sucessão de polinómios definida pela relação de recorrência

$$R_{n+1}(x) = (x - \beta_n)R_n(x) - \gamma_n R_{n-1}(x)\,, \quad n \geq 0\,,$$

com condições iniciais $R_{-1}(x) = 0$ and $R_0(x) = 1$, onde

$$\beta_{nk+j} := -a_{j+2}\,, \quad \gamma_{nk+j} := -b_{j+2}\,, \quad 0 \le j \le k-1\,, \quad n \ge 0\,.$$

Então, claramente,

$$Q_n = R_{n-1}(0)\,, \quad n \ge 0\,. \tag{1.20}$$

Seja $\Delta_{\mu,\nu}(x)$ o polinómio de grau $\nu - \mu + 1$, resultante da substituição de a_i por $x + a_i$ (para todo o i) na definição de $\Delta_{\mu,\nu}$. De forma análoga, seja $\varphi_k(x)$ o polinómio de grau k obtido pela substituição de a_i por $x + a_i$ (para todo o i) na definição de Δ_k. Notemos que $\Delta_{\mu,\nu} = \Delta_{\mu,\nu}(0)$ e $\Delta_k = \varphi_k(0)$. Então, definindo

$$\widetilde{U}_n(x) := d^n\, U_n\left(\tfrac{x-c}{2d}\right)\,, \quad n \ge 0\,,$$

onde d é uma das raízes quadradas de b (de modo que $d^2 = b = (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} b_i$), usando [8, Teorema 5.1] (ver Teorema A.3. no Apêndice), obtém-se

$$R_{nk+j}(x) = \Delta_{2,j+1}(x)\, \widetilde{U}_n(\varphi_k(x)) + (-1)^{j+1} \left(\textstyle\prod_{i=2}^{j+2} b_i\right) \Delta_{j+3,k}(x)\, \widetilde{U}_{n-1}(\varphi_k(x))\,, \tag{1.21}$$

para $0 \le j \le k-1$ e $n \ge 0$. Mas, tendo em conta (1.15)–(1.16), podemos escrever

$$\widetilde{U}_n(\varphi_k(0)) = d^n\, U_n\left(\tfrac{\Delta_k - c}{2d}\right) = \frac{\alpha_*^{n+1} - \beta_*^{n+1}}{\alpha_* - \beta_*}\,, \tag{1.22}$$

onde α_* e β_* são as raízes da equação quadrática (1.18). Assim,

$$\begin{aligned} Q_{nk+j+1} &= R_{nk+j}(0) \\ &= \frac{\Delta_{2,j+1} \cdot \left(\alpha_*^{n+1} - \beta_*^{n+1}\right) + (-1)^{j+1} \left(\prod_{i=2}^{j+2} b_i\right) \Delta_{j+3,k} \cdot \left(\alpha_*^n - \beta_*^n\right)}{\alpha_* - \beta_*} \end{aligned}$$

para $0 \le j \le k-1$ e $n \ge 0$. Além disso, obtém-se

$$Q_{nk+j+1} = \frac{(A_j \alpha_* + B_j)\ \alpha_*^n - (A_j \beta_* + B_j)\ \beta_*^n}{\alpha_* - \beta_*}\,, \quad 0 \le j \le k-1\,, \quad n \ge 0 \tag{1.23}$$

onde

$$A_j := \Delta_{2,j+1}\,, \quad B_j := (-1)^{j+1} \left(\textstyle\prod_{i=2}^{j+2} b_i\right) \Delta_{j+3,k}\,, \quad 0 \le j \le k-1\,. \tag{1.24}$$

Isto completa a prova, uma vez que, (1.23)–(1.24) pode ser reescrito como (1.17)–(1.19). De facto, se $m = nk + j$ com $0 \le j \le k-1$ e $n \ge 0$, então $n = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ e $j = m - k\lfloor \frac{m}{k} \rfloor$. Assim, $A_{k,m} = A_j\,, \quad B_{k,m} = B_j \quad \text{se} \quad m \equiv j \pmod{k}\,.$ □

Observação 1.19. *Fazendo $j = k-1$ em (1.23), obtemos*

$$Q_{nk} = \Delta_{2,k}\, \frac{\alpha_*^n - \beta_*^n}{\alpha_* - \beta_*} = Q_k\, \frac{\alpha_*^n - \beta_*^n}{\alpha_* - \beta_*}\,, \quad n \ge 0\,.$$

Assim, tendo em conta o facto de α_* e β_* satisfazerem (1.18), deduz-se imediatamente $Q_{kn} = (\Delta_k - c)Q_{k(n-1)} - bQ_{k(n-2)}\,, \quad n \ge 2\,.$

Seguidamente iremos aplicar o Teorema 1.18 para deduzir algumas relações envolvendo os números de Fibonacci. Comecemos por notar que F_{n+1} pode ser representado pelo determinante da matriz de ordem n (ver (A.3) no Apêndice ou Strang [15]):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ -1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix} = F_{n+1} \,, \quad n \geq 0 \,. \tag{1.25}$$

Se em (1.13) escolhermos $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = b_0 = b_1 = \cdots = b_{k-1} = 1$, então a sucessão $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ torna-se na sucessão de Fibonacci $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$. Neste caso, tendo em conta (1.25), concluímos que

$$\begin{gathered} b = (-1)^k \,, \quad c = 1 + (-1)^k \,, \\ \Delta_k = F_{k+1} + F_{k-1} + 1 + (-1)^k = L_k + 1 + (-1)^k \,, \\ A_j = F_{j+1} \,, \quad B_j = (-1)^{j+1} F_{k-j-1} \quad (0 \leq j \leq k-1) \,, \end{gathered} \tag{1.26}$$

onde $L_k = F_{k+1} + F_{k-1}$ é o $k-$ésimo número de Lucas. Além disso, aplicando o Teorema 1.18 e (1.23)–(1.24), concluímos que os números de Fibonacci satisfazem

$$F_{nk+j+1} = \frac{\left(F_{j+1}\alpha_k + (-1)^{j+1}F_{k-j-1}\right)\, \alpha_k^n - \left(F_{j+1}\beta_k + (-1)^{j+1}F_{k-j-1}\right)\, \beta_k^n}{\alpha_k - \beta_k} \,,$$
$$k \geq 3 \,, \quad 0 \leq j \leq k-1 \,, \quad n \geq 0 \,,$$

onde α_k e β_k são as raízes da equação quadrática $z^2 - L_k\, z + (-1)^k = 0$. Tendo em conta a identidades (1.6) e o facto de $L_k = \alpha^k + \beta^k$ e $F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$, $k \geq 1$ (com α e β definidos como na secção 1.2), concluímos

$$\alpha_k = \frac{L_k + \sqrt{5}F_k}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \,, \quad \beta_k = \frac{L_k - \sqrt{5}F_k}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \,.$$

Em particular, tendo em conta a Observação 1.19, obtemos as seguintes identidades para os números de Fibonacci

$$\begin{aligned} F_{nk} &= \frac{\left(L_k + \sqrt{5}F_k\right)^n - \left(L_k - \sqrt{5}F_k\right)^n}{2^n \sqrt{5}} \,,\ n \geq 0 \,, \\ F_{kn} &= L_k F_{k(n-1)} - (-1)^k F_{k(n-2)} \,, \quad n \geq 2 \,. \end{aligned}$$

1.5. Função geradora da sucessão de Fibonacci generalizada

Nesta secção iremos deduzir a função geradora para $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida em (1.13). Para tal é fundamental notar que a função geradora para $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida em (1.14) é dada por (ver (A.6) no Apêndice)

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = \frac{1}{1-2tx+t^2} . \tag{1.27}$$

Teorema 1.20. *A função geradora para $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida em (1.13) é dada por*

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m\, t^m = \sum_{j=0}^{k-1} t^j \left\{ \Delta_{2,j} + (-1)^j \left(\prod_{i=2}^{j+1} b_i\right) \Delta_{j+2,k}\, t^k \right\} \frac{1}{1-(\Delta_k - c)t^k + d^2t^{2k}} , \tag{1.28}$$

com $d^2 = b := (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} b_i$ e $c := (-1)^k\ (b_2 + b/b_2)$.

Demonstração. Denotemos $F(t) := \sum_{m=0}^{\infty} Q_m\, t^m$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} Q_{nk+j}\, t^{nk+j} \overset{(1.20)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} R_{nk+j-1}(0)\, t^{nk+j} \\
&\overset{(1.21)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \Delta_{2,j}\, \widetilde{U}_n(\varphi_k(0)) + (-1)^j \left(\prod_{i=2}^{j+1} b_i\right) \Delta_{j+2,k}\, \widetilde{U}_{n-1}(\varphi_k(0)) \right\} t^{nk+j} \\
&\overset{(1.22)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \Delta_{2,j}\, d^n U_n\left(\frac{\Delta_k - c}{2d}\right) + (-1)^j \left(\prod_{i=2}^{j+1} b_i\right) \Delta_{j+2,k}\, d^{n-1} U_{n-1}\left(\frac{\Delta_k - c}{2d}\right) \right\} t^{nk+j} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_{2,j}\, t^j \sum_{n=0}^{\infty} U_n\left(\frac{\Delta_k - c}{2d}\right) \left(t^k d\right)^n + \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left(\prod_{i=2}^{j+1} b_i\right) \Delta_{j+2,k}\, t^{k+j} \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-1}\left(\frac{\Delta_k - c}{2d}\right) \left(dt^k\right)^{n-1} \\
&\overset{(1.27)}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta_{2,j}\, t^j}{1-(\Delta_k - c)t^k + d^2t^{2k}} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \left(\prod_{i=2}^{j+1} b_i\right) \Delta_{j+2,k}\, t^{k+j}}{1-(\Delta_k - c)t^k + d^2t^{2k}} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} t^j \left\{ \Delta_{2,j} + (-1)^j \left(\prod_{i=2}^{j+1} b_i\right) \Delta_{j+2,k}\, t^k \right\} \frac{1}{1-(\Delta_k - c)t^k + d^2t^{2k}} .
\end{aligned}$$

□

O Teorema anterior generaliza os resultados obtidos em [12, Secção 4].

Exemplo 1.21. *Escolhendo $k = 3$, no Teorema anterior, obtemos $\Delta_{2,0} = 0$, $\Delta_{2,1} = \Delta_{4,3} = 1$ $\Delta_{2,2} = a_2$, $\Delta_{2,3} = a_0a_2 + b_0$, $\Delta_{3,3} = a_0$, $\Delta_3 = a_0a_1a_2 + a_0b_2 + a_1b_0 + a_2b_1 + b_0b_1 - b_2$, $b = d^2 = -b_0b_1b_2$ e $c = -b_2 + b_0b_1$. Aplicando (1.28), deduz-se*

$$F(t) = \frac{b_0b_2t^5 - a_0b_2t^4 + (a_0a_2 + b_0)t^3 + a_2t^2 + t}{1-(a_0a_1a_2 + a_0b_2 + a_1b_0 + a_2b_1)t^3 - b_0b_1b_2t^6} .$$

No caso particular de $b_0 = b_1 = b_2 = 1$, obtemos a função geradora deduzida em [12, Exemplo 1].

Lema 1.22. *Para $k \geq 3$ é válida a identidade seguinte:*

$$F_k t^k + \sum_{j=0}^{k-1} F_j \left(t^j + (-1)^{k-j} t^{2k-j}\right) = \frac{t}{1-t-t^2}\left(1 - L_k t^k + (-1)^k t^{2k}\right) . \qquad (1.29)$$

Demonstração. A demonstração é feita por indução matemática. Para $k = 3$ temos $F_3 t^3 + \sum_{j=0}^{2} F_j \left(t^j + (-1)^{3-j} t^{6-j}\right) = F_3 t^3 + F_1 \left(t + t^5\right) + F_2 \left(t^2 - t^4\right) = t^5 - -t^4 + 2t^3 + t^2 + t = \dfrac{t - 4t^4 - t^7}{1-t-t^2} = \dfrac{t}{1-t-t^2}\left(1 - L_3 t^3 - t^6\right).$

Admitindo agora que a identidade (1.29) se verifica para um número inteiro $k \geq 3$, mostremos que também se verifica para $k+1$. De facto,

$$\begin{aligned}
& F_{k+1} t^{k+1} + \textstyle\sum_{j=0}^{k} F_j \left(t^j + (-1)^{k+1-j} t^{2k+2-j}\right) \\
\overset{(1.2)}{=} & \left(F_k + F_{k-1}\right) t^{k+1} + \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} F_j \left(t^j + (-1)^{k+1-j} t^{2k+2-j}\right) + F_k \left(t^k - t^{k+2}\right) \\
\overset{(1.2)}{=} & \, t\left(F_k t^k + \textstyle\sum_{j=2}^{k-1} F_{j-1} \left(t^{j-1} + (-1)^{k+1-j} t^{2k+1-j}\right)\right) + t + (-1)^k t^{2k+1} \\
& + t^2 \left(F_{k-1} t^{k-1} + \textstyle\sum_{j=2}^{k-1} F_{j-2} \left(t^{j-2} + (-1)^{k+1-j} t^{2k-j}\right)\right) + F_k \left(t^k - t^{k+2}\right) \\
= & \, t\left(F_k t^k + \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} F_j \left(t^j + (-1)^{k-j} t^{2k-j}\right)\right) - t F_{k-1}\left(t^{k-1} - t^{k+1}\right) \\
& + t^2 \left(F_{k-1} t^{k-1} + \textstyle\sum_{j=0}^{k-2} F_j \left(t^j + (-1)^{k+1-j} t^{2k-j-2}\right)\right) - \\
& - t^2 F_{k-2}\left(t^{k-2} - t^k\right) + F_k \left(t^k - t^{k+2}\right) + t + (-1)^k t^{2k+1} \\
\overset{H.I}{=} & \, \tfrac{t^2}{1-t-t^2}\left(1 - L_k t^k + (-1)^k t^{2k}\right) + \tfrac{t^3}{1-t-t^2}\left(1 - L_{k-1} t^{k-1} + (-1)^{k-1} t^{2k-2}\right) + \\
& + t\left(F_{k-1}\left(t^{k+1} - t^{k-1}\right) + t F_{k-2}\left(t^k - t^{k-2}\right) + F_k t^{k-1} - F_k t^{k+1} + 1 + (-1)^k t^{2k}\right) \\
= & \, \tfrac{t}{1-t-t^2}\left(1 - \left(L_{k-1} + L_k\right) t^{k+1} + (-1)^{k+1} t^{2(k+1)}\right) \\
\overset{(1.3)}{=} & \, \tfrac{t}{1-t-t^2}\left(1 - L_{k+1} t^{k+1} + (-1)^{k+1} t^{2(k+1)}\right) .
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 1.23. *Escolhendo $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = b_0 = b_1 = \cdots = b_{k-1} = 1$, obtemos $Q_n = F_n$, $\Delta_{2,j} = F_j$, $\Delta_{j+2,k} = F_{k-j}$ e a função geradora dada em (1.28) reduz-se à função geradora (1.12). De facto, por (1.28) e (1.26) obtemos*

$$\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} t^j \left\{F_j + (-1)^j F_{k-j} t^k\right\} \frac{1}{1 - L_k t^k + (-1)^k t^{2k}} \\
&= \left(F_k t^k + \sum_{j=0}^{k-1} F_j \left(t^j + (-1)^{k-j} t^{2k-j}\right)\right) \frac{1}{1 - L_k t^k + (-1)^k t^{2k}} \\
&= \frac{t}{1-t-t^2} ,
\end{aligned}$$

sendo a última igualdade justificada pelo Lema 1.22.

Terminamos este trabalho referindo que os conteúdos abordados são muito férteis em aplicações. É possível interligar os temas aqui tratados com os conteúdos e as novas metas curriculares dos programas do ensino básico. Pensamos também ser possível analisar algumas propriedades de convergência da sucessão de Fibonacci generalizada, $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$, bem como deduzir novas propriedades desta sucessão.

Apêndice

Alguns resultados sobre a teoria dos polinómios ortogonais

Seguidamente iremos apresentar, sem demonstração, alguns resultados da teoria dos polinómios ortogonais que poderão facilitar a leitura e uma melhor compreensão da Secção 1.4 deste trabalho.

Sejam $\mathbf{u} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ uma funcional linear e $(P_n)_n$ uma sucessão de polinómios em $\mathbb{C}[x]$ tal que P_n tem grau n para todo o n. Diz-se que $(P_n)_n$ é uma sucessão de polinómios ortogonais (SPO) a respeito de $\mathbf{u}$ se existe uma sucessão de números complexos não nulos, $(k_n)_n$, tal que

$$\langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = k_n \delta_{n,m} \ , \quad n, m \in \mathbb{N}_0 \ , \tag{A.1}$$

onde $\delta_{n,m}$ designa o símbolo de Kronecker e $\langle \mathbf{u}, p \rangle$ representa a ação da funcional $\mathbf{u}$ sobre um polinómio $p \in \mathbb{C}[x]$. Se cada P_n é um polinómio mónico, a SPO $(P_n)_n$ diz-se uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos (SPOM).

Um resultado fundamental da Teoria dos Polinómios Ortogonais é o Teorema de Favard que estabelece que uma sucessão de polinómios mónicos, $(P_n)_n$, tal que $\operatorname{grau} P_n = n$ para todo o n, é uma SPOM a respeito de alguma funcional linear $\mathbf{u} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ se e só se existem sucessões de números complexos $(\beta_n)_n$ e $(\gamma_n)_n$, com $\gamma_{n+1} \neq 0$ para todo o n, tais que $(P_n)_n$ satisfaz a relação de recorrência a três termos (RRTT)

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x) \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ , \tag{A.2}$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$.

Constata-se facilmente, a partir da relação de recorrência (A.2), que o polinómio mónico $P_n(x)$ é dado explicitamente, para todos os $n = 1, 2, \cdots$, pela fórmula determinantal (determinante de ordem n, de uma matriz tridiagonal)

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x-\beta_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & x-\beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_{n-2} & x-\beta_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & x-\beta_{n-1} \end{vmatrix} . \tag{A.3}$$

Uma família de polinómios ortogonais bem conhecida na literatura é a família dos polinómios de Chebyshev de segunda espécie, os quais são determinados a partir da relação de recorrência

$$2xP_n(x) = P_{n+1} + P_{n-1}(x) \ , \quad n = 1, 2, \cdots \ , \tag{A.4}$$

com as condições iniciais $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = 2x$. Esta família de polinómios é geralmente denotada por U_n em vez de P_n. Note-se que $(U_n)_n$ não é uma SPOM. A SPOM, $(\widehat{U}_n)_n$, correspondente à SPO $(U_n)_n$ é dada por $\widehat{U}_n(x) = 2^{-n}U_n(x)$, $n \geq 1$. Relações trigonométricas elementares mostram que, para $x = \cos\theta$, $\theta \in (0, \pi)$, são válidas as representações

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\ &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Tendo em conta (A.4) concluímos (formalmente) que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n &= 1 + 2tx + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} U_n(x)t^n \\ &\overset{(A.4)}{=} 1 + 2tx + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)\right) t^n \\ &= 1 + 2tx + 2x \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} U_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} U_{n-2}(x)t^n \\ &= 1 + 2tx + 2xt \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)t^n - t^2 \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n \\ &= 1 + 2tx \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n - t^2 \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n \ , \end{aligned}$$

donde se conclui que a função geradora para $(U_n)_n$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = \frac{1}{1 - 2tx + t^2} \ . \tag{A.6}$$

De acordo com o Teorema de Favard, dada uma qualquer SPOM, $(P_n)_n$, esta pode ser caracterizada por uma RRTT. Conforme foi observado em [2, 3], fixado um número inteiro $k \geq 2$, esta RRTT pode ser descrita por blocos de RRTT's (cada um dos blocos contendo k equações) do tipo

$$\begin{aligned} (x - b_n^{(j)})P_{nk+j}(x) = P_{nk+j+1}(x) + a_n^{(j)} P_{nk+j-1}(x)\,, \\ j = 0, 1, \cdots, k-1\,; \quad n = 0, 1, 2, \cdots\,, \end{aligned} \tag{A.7}$$

com $a_n^{(j)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $b_n^{(j)} \in \mathbb{C}$ para todos os n e j, com as condições iniciais

$$P_{-1}(x) = 0\,, \quad P_0(x) = 1\,. \tag{A.8}$$

Sem perda de generalidade, pode-se supor que $a_0^{(0)} = 1$ e $P_j(x) := 0$ para $j \leq -1$. De seguida introduzem-se os determinantes $\Delta_n(i, j; \cdot)$. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, define-se

$$\Delta_n(i, j; x) := \begin{cases} 0 & \text{se } j < i - 2 \\ 1 & \text{se } j = i - 2 \\ x - b_n^{(i-1)} & \text{se } j = i - 1 \end{cases} \tag{A.9}$$

e, para $j \geq i \geq 1$,

$$\Delta_n(i, j; x) := \begin{vmatrix} x - b_n^{(i-1)} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_n^{(i)} & x - b_n^{(i)} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n^{(i+1)} & x - b_n^{(i+1)} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x - b_n^{(j-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n^{(j)} & x - b_n^{(j)} \end{vmatrix}. \tag{A.10}$$

Como *a priori* o grau do polinómio $\Delta_n(i, j; \cdot)$ pode ser maior ou igual a k e uma vez que em (A.7) os coeficientes $a_n^{(j)}$'s e $b_n^{(j)}$'s estão definidos apenas para $0 \leq j \leq k-1$, adotam-se as seguintes convenções:

$$b_n^{(k+j)} := b_{n+1}^{(j)}\,, \quad a_n^{(k+j)} := a_{n+1}^{(j)} \tag{A.11}$$

para $i, j = 0, 1, 2, \cdots$ e $n = 0, 1, 2, \cdots$. Deste modo, verifica-se a igualdade

$$\Delta_n(k + i, k + j; \cdot) = \Delta_{n+1}(i, j; \cdot) \tag{A.12}$$

para $i, j = 0, 1, 2, \cdots$ e $n = 0, 1, 2, \cdots$.

O teorema seguinte, obtido em [8], estabelece condições necessárias e suficientes que asseguram a existência de uma outra SPOM, $(Q_n)_n$, tal que a SPOM dada, $(P_n)_n$, possa ser descrita por uma transformação polinomial do tipo

$$P_{nk+m}(x) = \theta_m(x) Q_n(\pi_k(x))\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{A.13}$$

onde k e m são números inteiros fixos, com $k \geq 2$ e $0 \leq m \leq k-1$, e π_k e θ_m são polinómios de graus k e m, respetivamente.

Teorema A.1. *[8, Teorema 2.1.] Seja $(P_n)_n$ uma SPOM caracterizada pela RRTT (A.7). Sejam $r \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}_0$, com $0 \leq m \leq k-1$. Então, existem polinómios π_k e θ_m, de graus k e m (resp.), e uma SPOM $(Q_n)_n$ tais que $Q_1(0) = -r$ e*

$$P_{kn+m}(x) = \theta_m(x)\, Q_n(\pi_k(x))\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{A.14}$$

se e só se as quatro condições seguintes se verificam:

(i) *$b_n^{(m)}$ é independente de n para todo o $n = 0, 1, 2, \cdots$;*

(ii) *$\Delta_n(m+2, m+k-1; x)$ é independente de n para todo o $n = 0, 1, 2, \cdots$;*

(iii) *$\Delta_0(m+2, m+k-1; \cdot)$ é divisível por $\Delta_0(1, m-1; \cdot)$, i.e., existe um polinómio η_{k-1-m}, de grau $k-1-m$, tal que*

$$\Delta_0(m+2, m+k-1; x) = \Delta_0(1, m-1; x)\, \eta_{k-1-m}(x)\,;$$

(iv) *$r_n(x)$ é independente de x para todo o $n = 1, 2, \cdots$, onde*

$$\begin{aligned} r_n(x) := {} & a_n^{(m+1)} \Delta_n(m+3, m+k-1; x) - a_0^{(m+1)} \Delta_0(m+3, m+k-1; x) \\ & + a_n^{(m)} \Delta_{n-1}(m+2, m+k-2; x) - a_0^{(m)} \Delta_0(1, m-2; x)\, \eta_{k-1-m}(x)\,. \end{aligned}$$

Nestas condições, os polinómios θ_m e π_k são dados explicitamente por

$$\begin{aligned} \theta_m(x) &= \Delta_0(1, m-1; x) \equiv P_m(x)\,, \\ \pi_k(x) &= \Delta_0(1, m; x)\, \eta_{k-1-m}(x) - a_0^{(m+1)}\, \Delta_0(m+3, m+k-1; x) + r\,, \end{aligned} \tag{A.15}$$

e a SPOM $(Q_n)_n$ é caracterizada pela RRTT

$$Q_{n+1}(x) = (x - r_n)\, Q_n(x) - s_n Q_{n-1}(x)\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{A.16}$$

com condições iniciais $Q_{-1}(x) = 0$ e $Q_0(x) = 1$, onde

$$r_0 := r\,, \quad r_n := r + r_n(0)\,, \quad s_n := a_n^{(m)} a_{n-1}^{(m+1)} \cdots a_{n-1}^{(m+k-1)} \tag{A.17}$$

para todo o $n = 1, 2, \cdots$. Além disso,

$$\begin{aligned} P_{kn+m+j+1}(x) = \frac{1}{\eta_{k-1-m}(x)} & \Big\{ \Delta_n(m+2, m+j; x)\, Q_{n+1}(\pi_k(x)) \\ & + \Big(\textstyle\prod_{i=1}^{j+1} a_n^{(m+i)} \Big) \Delta_n(m+j+3, m+k-1; x)\, Q_n(\pi_k(x)) \Big\} \end{aligned} \tag{A.18}$$

para cada $j = 0, 1, \cdots, k-1$ e para todo o $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Observação A.2. *Se $m = k-1$ as condições* (ii) *e* (iii) *são equivalentes a*

$$\Delta_n(1, k-2; x) = \Delta_0(1, k-2; x) \equiv \theta_{k-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Além disso, se se verificar a condição (iv)*, isto é, se o polinómio $r_n(x)$ é independente de x, o coeficiente do termo de maior grau na expressão de $r_n(x)$ deve ser nulo. Assim, para $k > 2$, verifica-se a igualdade $a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(k-1)} = a_1^{(0)} + a_0^{(k-1)}$ para todo o $n = 1, 2, \cdots$ (isto é, o primeiro membro da igualdade é independente de n).*

Seguidamente assume-se que $k \geq 3$ e $m = k-1$. Fixem-se $2k$ números complexos $b_0, \cdots, b_{k-1}, c_0, \cdots, c_{k-1}$, com $c_j \neq 0$ para todo o $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Seja $(P_n)_n$ uma SPOM caracterizada por (A.7) com as seguintes condições:

$$\begin{aligned} b_n^{(j)} &:= b_j \quad (0 \leq j \leq k-1) \\ a_n^{(j)} &:= c_j \quad (1 \leq j \leq k-2) \\ a_1^{(0)} &:= c_0\,, \quad a_0^{(k-1)} := c_{k-1} \\ a_{n+1}^{(0)} + a_n^{(k-1)} &= c_0 + c_{k-1} \end{aligned} \tag{A.19}$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \ldots$. Aqui, $a_{n+1}^{(0)}$ e $a_n^{(k-1)}$ são números complexos não nulos que *a priori* podem depender de n. De seguida justifica-se que esta SPOM $(P_n)_n$ pode ser descrita por uma transformação polinomial do tipo indicado no Teorema A.1 (com $m = k-1$). Com efeito, seja φ_k o polinómio mónico de grau k definido por

$$\varphi_k(x) := \begin{vmatrix} x-b_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ c_1 & x-b_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & x-b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b_{k-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{k-2} & x-b_{k-2} & 1 \\ c_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{k-1} & x-b_{k-1} \end{vmatrix},$$

e $\Delta_{r,s}(x)$ o polinómio de grau $s-r+1$ assim definido: se $0 \leq r < s \leq k-1$,

$$\Delta_{r,s}(x) := \begin{vmatrix} x-b_r & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{r+1} & x-b_{r+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{r+2} & x-b_{r+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b_{s-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_s & x-b_s \end{vmatrix}; \tag{A.20}$$

e, se $r \leq s$,

$$\Delta_{r,s}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad s < r-1 \\ 1 & \text{se} \quad s = r-1 \\ x - b_r & \text{se} \quad s = r\,. \end{cases}$$

Como $\Delta_n(1, k-2; x) = \Delta_{0,k-2}(x)$ para todo o $n = 0, 1, 2, \ldots$ então as condições (i) e (ii) do Teorema A.1 são verificadas. Além disso,

$$\theta_{k-1}(x) = \Delta_{0,k-2}(x)\,.$$

Por outro lado, manipulando o determinante que define $\varphi_k(x)$, verifica-se facilmente que o polinómio π_k que figura no Teorema A.1 é dado por

$$\pi_k(x) = \Delta_{0,k-1}(x) - c_0 \Delta_{1,k-2}(x) = \varphi_k(x) + (-1)^k \left(c_0 + \textstyle\prod_{i=1}^{k-1} c_i \right)\,. \tag{A.21}$$

Finalmente, tem-se $\Delta_n(2, k-2; x) = \Delta_{1,k-2}(x)$ e $\Delta_n(1, k-3; x) = \Delta_{0,k-3}(x)$ para todo o $n = 0, 1, 2, \ldots$, logo, tendo em conta a última equação de (A.19), conclui-se que o polinómio $r_n(x)$ definido no Teorema A.1 é dado por

$$r_n(x) = \left(a_{n+1}^{(0)} - c_0 \right) \left(\Delta_{1,k-2}(x) - \Delta_{0,k-3}(x) \right) \tag{A.22}$$

para todo o $n = 0, 1, 2 \ldots$. Esta igualdade permite encontrar condições que assegurem que a hipótese (iv) do Teorema A.1 se verifica, isto é, tais que $r_n(x)$ seja independente de x para todo o n. Por exemplo, se $k = 3$ então

$$r_n(x) = \left(a_{n+1}^{(0)} - c_0 \right) (b_0 - b_1)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \ldots$, isto é, $r_n(x)$ é sempre independente de x. Porém, se $k = 4$ tem-se

$$r_n(x) = \left(a_{n+1}^{(0)} - c_0 \right) \left((b_0 - b_2)(x - b_1) + c_1 - c_2 \right)$$

para todo o $n = 0, 1, 2, \ldots$; e, assim, $r_n(x)$ é independente de x se e só se $b_0 = b_2$ ou $a_{n+1}^{(0)} = c_0$ para todo o $n = 0, 1, 2 \ldots$. De seguida analisa-se uma situação em que $r_n(x)$ é independente de x.

Escolhendo $a_{n+1}^{(0)}$ e $a_n^{(k-1)}$ em (A.19) independentes de n, isto é,

$$a_{n+1}^{(0)} = c_0\,, \quad a_n^{(k-1)} = c_{k-1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)\,,$$

decorre de (A.22) que $r_n(x) \equiv 0$ (independente de x) e, portanto, todas as hipóteses do Teorema A.1 são verificadas. Além disso, uma vez que $r_0 = r_n = 0$ e $s_n =$

const. $= c_0 c_1 \cdots c_{k-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, então Q_n é, a menos de uma transformação afim da variável, um polinómio de Chebyshev de segunda espécie,

$$Q_n(x) = s_1^{n/2} U_n \left(x/(2\sqrt{s_1}\,)\right), \quad n = 0, 1, 2 \cdots .$$

Note-se que, nesta situação, os coeficientes que figuram na RRTT para $(P_n)_n$ são sucessões periódicas de período k, isto é, a SPOM $(P_n)_n$ é caracterizada por

$$(x - \beta_n) P_n(x) = P_{n+1}(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{A.23}$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$, onde

$$\beta_{nk+i} := b_i, \quad \gamma_{nk+i} := c_i \qquad (0 \le i \le k-1\ ;\ n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{A.24}$$

Sejam

$$c^2 := \prod_{i=0}^{k-1} c_i \quad \text{e} \quad d := (-1)^{k+1} \frac{c_0^2 + c^2}{c_0}$$

(escolhe-se c de modo a ser uma raiz quadrada de $\prod_{i=0}^{k-1} c_i$). Defina-se ainda

$$\widetilde{U}_n(x) := c^n U_n\left(\tfrac{x-d}{2c}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{A.25}$$

Como consequência imediata do Teorema A.1 obtém-se o resultado seguinte, que foi utilizado por J. Petronilho em [11], para resolver o problema (P) da Secção 1.4.

Teorema A.3. *A SPOM $(P_n)_n$ caracterizada por (A.23)–(A.24), com $b_j \in \mathbb{C}$ e $c_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para todo o j, pode ser descrita por uma transformação polinomial definida pelos polinómios de Chebyshev de segunda espécie, do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} P_{nk+j}(x) = {} & \Delta_{0,j-1}(x)\, \widetilde{U}_n(\varphi_k(x)) \\ & + \left(\textstyle\prod_{i=0}^{j} c_i\right) \Delta_{j+1,k-2}(x)\, \widetilde{U}_{n-1}(\varphi_k(x)) \end{aligned} \tag{A.26}$$

para $0 \le j \le k-1$ e para todo o $n = 0, 1, 2, \cdots$. Em particular,

$$P_{nk+k-1}(x) = \Delta_{0,k-2}(x)\, \widetilde{U}_n(\varphi_k(x)), \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{A.27}$$

Bibliografia

[1] Z. R. Bogdonowicz, *Formulas for the number of spanning trees in a fan*, Appl. Math. Sci. **2**, (2008), 781-786.

[2] J. Charris and M. E. H. Ismail: *On sieved orthogonal polynomials VII: generalized polynomial mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 71-93.

[3] J. Charris, M. E. H. Ismail, and S. Monsalve: *On sieved orthogonal polynomials X: general blocks of recurrence relations*, Pac. J. Math. **163** (1994) no. 2, 237-267.

[4] P. Chebotarev, *Spanning forests and the golden ratio*, Discrete Appl. Math. 156, (2008), 813- 821.

[5] M. Edson and O. Yayenie, *A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet's formula*, Integers **9** (A48)(2009), 639-654.

[6] M. Edson, S. Lewis and O. Yayenie, *The $k-$periodic Fibonacci sequence and an extended Binet's formula*, Integers **11** (A32)(2011), 739-751.

[7] J. Feng, *Fibonacci identities via the determinant of tridiagonal matrix*, Appl. Math. Comput. **217** (2011) 5978-5981.

[8] M. N. de Jesus and J. Petronilho, *On orthogonal polynomials obtained via polynomial mappings*, J. Approx. Theory 162 (2010) 2243-2277.

[9] F. Marcellán and J. Petronilho, *Eigenproblems for tridiagonal $2-$Toeplitz matrices and quadratic polynomial mappings*, Linear Algebra Appl. **260** (1997) 169-208.

[10] F. Marcellán and J. Petronilho, *Orthogonal polynomials and quadratic transformations*, Port. Math. **56** (1999) 81-113.

[11] J. Petronilho: *Generalized Fibonacci sequences via orthogonal polynomials*, Appl. Math. Comput. **218** (2012) 9819-9824.

[12] M. Sahin, *The generating function of a family of the sequences in terms of the continuant*, Appl. Math. Comput. **217** (2011) 5416-5420.

[13] C. P dos Santos, J. P. Neto, J. N. Silva:*Sucessão de Fibonacci*, colecção jogos com história, 2008.

[14] M. Schork, *Generalized Heisenberg algebras and k-generalized Fibonacci numbers*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), 4207-4214.

[15] G. Strang, *Introduction to linear algebra* (2nd. ed.), Wellesley (MA): Wellesley- Cambridge, 1998.

[16] Thomas Koshy:*Fibonacci and Lucas numbers with aplications*, pure and applied mathematics, a wiley-interscience series of texts, monographs and tracts, 2001.

[17] O. Yayenie, *A note on generalized Fibonacci sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011) 5603-5611.

[18] *Fibonacci numbers and the Golden section*,
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/