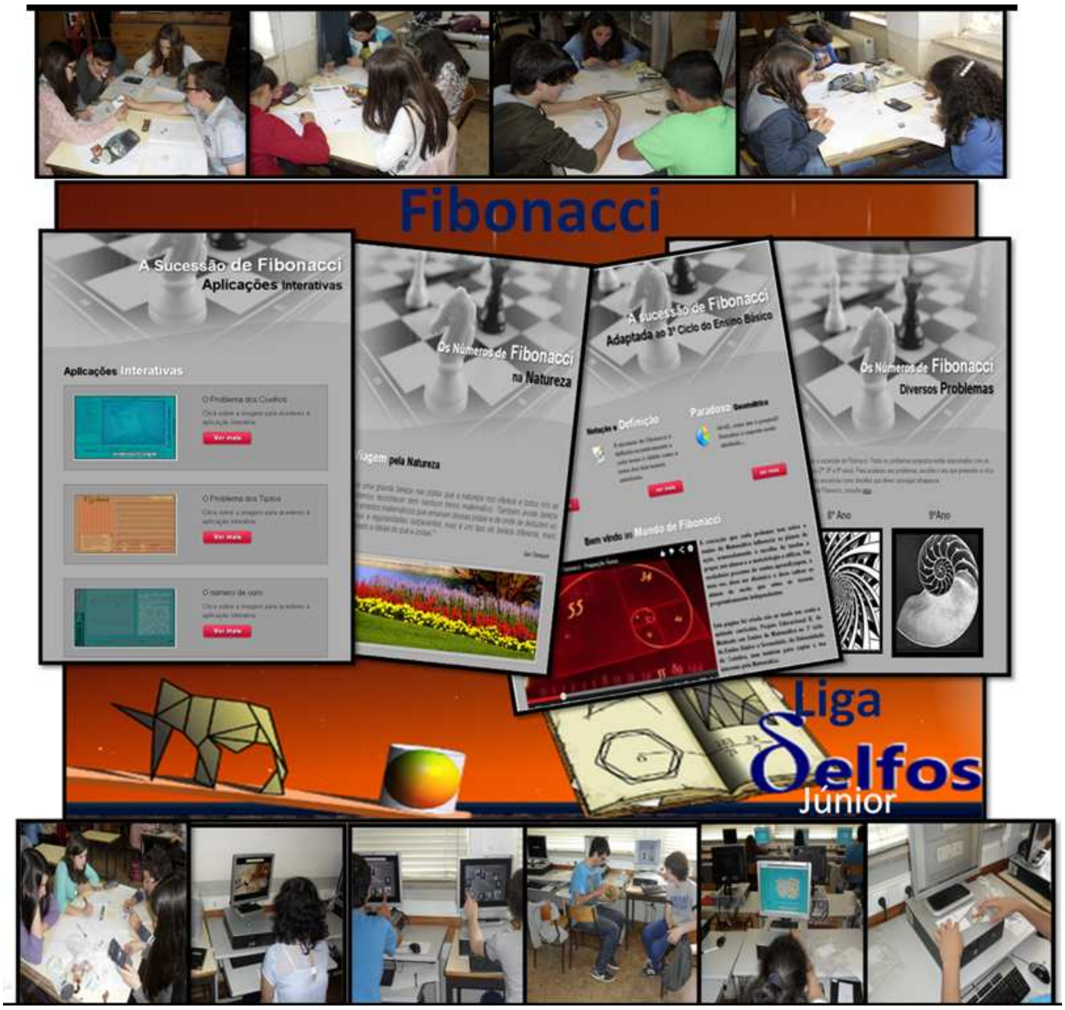


Sucessão de Fibonacci adaptada ao Ensino Básico

Márcio Dinis do Nascimento de Jesus

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Sucessão de Fibonacci adaptada ao Ensino Básico

Márcio Dinis do Nascimento de Jesus

PROJETO EDUCACIONAL II do Mestrado em Ensino de Matemática no 3^o ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Professor Doutor Armando Gonçalves

Resumo

Neste trabalho apresentamos diversas aplicações, ao nível do ensino básico, da sucessão de Fibonacci, na sequência do estudo desenvolvido na unidade curricular Projeto Educacional I [1]. Exploramos alguns aspetos lúdicos que o assunto proporciona, bem como outros de natureza menos lúdica, através do enquadramento do tema em diferentes conteúdos dos programas do 3^o ciclo do ensino básico atualmente em vigor.

Palavras Chave: Programas do 3^o ciclo do ensino básico, sucessão de Fibonacci, números de Fibonacci.

Abstract

In this work we present several applications of the Fibonacci sequence, at the basic level, following the work presented in the curricular unit Educational Project I [1]. We explore some playful aspects provided by the subject, as well as others of less playful nature, through the framing of the topic in different contents of the current 3rd cycle basic education programs.

Keywords: Basic education programs, Fibonacci sequence, Fibonacci numbers.

Índice

A sucessão de Fibonacci e algumas aplicações no Ensino Básico

A conceção que cada professor tem sobre o ensino da Matemática influencia os planos de ação, nomeadamente a escolha de tarefas/atividades a propor aos alunos e a metodologia a utilizar. Um verdadeiro processo de ensino-aprendizagem, a meu ver, deve ser dinâmico e deve cativar os alunos de modo a que se tornem progressivamente independentes.

A disciplina de Projeto Educacional II tem como principal objetivo a aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos na disciplina de Projecto Educacional I [1], em contexto escolar. Na descrição desta disciplina, pode ler-se *"[...] desenvolvimento de projectos de índole didática e de ensino /aprendizagem de adequado nível científico [...] e uma forte componente de inovação e de investigação educacional, estando sempre presente dois objetivos fundamentais: a melhoria do sistema de ensino e o questionamento dos conteúdos programáticos em vigor."*

Neste sentido, o Projecto Educacional II consistiu, assim, na concretização dos dois tópicos seguintes:

1. Desenvolvimento de atividades de índole didática, privilegiando a componente de inovação e de investigação educacional.

2. Desenvolvimento de atividades de índole científica, tendo em conta os conteúdos programáticos em vigor.

O tópico 1 começou a ser delineado logo desde o ínicio do ano letivo. Neste sentido, foi criada a página Web "A sucessão de Fibinacci, adaptada ao 3^0 ciclo do ensino básico", tendo em conta os objetivos da disciplina Projeto Educacional II. Assim, pretendeu-se captar o interesse pela Matemática dos alunos do 3^0 ciclo de ensino básico, não só durante o período escolar, mas, essencialmente, em períodos de pausas letivas.

A criação desta página é fruto de uma enorme investigação educacional, que aborda além de uma vertente lúdica e interativa, uma vertente mais científica, composta por uma série de problema (28 problemas, com mais de 100 questões). Todos os problemas estão relacionados com a sucessão de Fibonacci e com os conteúdos, atualmente em vigor, nos programas do 3^0 ciclo do ensino básico.

A fim de testar a eficácia da página na escola, surgiu a oportunidade de eu poder participar no programa de enriquecimento curricular – "Pedais 2014 "– resultante de uma parceria das Escolas da Zona Urbana de Viseu com a ANEIS (Associação Nacional para o Estudo e Intervenção na Sobredotação), surgindo naturalmente a atividade "A Sucessão de Fibonacci no programa Pedais 2014". Nesta atividade não nos limitámos a explorar a página Web, mas também a concretizar alguns truques, paradoxos e curiosidades nela referidos.

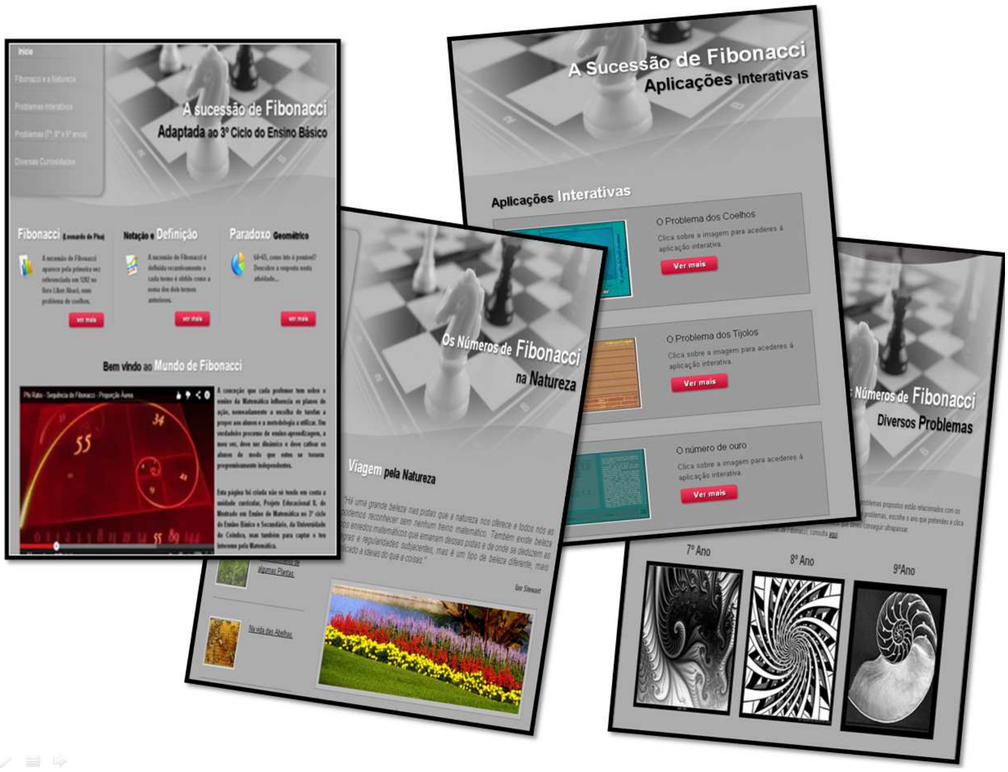
Quanto ao tópico 2, foram desenvolvidas duas atividades "A Sucessão de Fibonacci na Liga Delfos Júnior" e "A Sucessão de Fibonacci numa aula do 7º ano". A primeira foi integrada numa competição (Liga) e a segunda foi explorada numa aula prevista para esse efeito. A atividade "A Sucessão de Fibonacci na Liga Delfos Júnior" coincidiu com o arranque, pela primeira vez na escola, da Liga Delfos Júnior e que consistia na resolução, por equipas (compostas por quatro alunos do 3^0 ciclo), de uma prova organizada por quatro problemas, todos eles alusivos à sucessão de Fibonacci e relacionados com a geometria, lógica matemática e teoria dos números.

A atividade "A Sucessão de Fibonacci numa aula do 7º ano" coincidiu com parte de uma aula assistida do 7^0 ano, em que os alunos foram confrontados com problemas e procedimentos algébricos, um pouco diferentes dos habituais, sendo levados a conjeturar uma propriedade algébrica demonstrada no Projeto Educacional I [1, Proposição 1.1].

Este Projeto Educacional II está organizado da forma descrita a seguir. Na secção 1.1, apresentamos a estrutura e os conteúdos disponíveis na página Web. Na secção 1.2, apresentamos a primeira prova, elaborada na Liga Delfos Júnior, alusiva aos números de Fibonacci e, explicamos o funcionamento da Liga. Na secção 1.3, apresentamos os problemas discutidos com os alunos numa aula assistida e descrevemos o ambiente em que decorreu esta atividade. Na secção 1.4, apresentamos a planificação de duas sessões que decorreram no âmbido do programa "Pedais 2014" e tentamos descrever, de forma muito resumida, as atividades levadas a cabo. Terminamos o trabalho com a secção 1.5, onde se faz uma reflexão (balanço) das atividades desenvolvidas. No final deste Relatório incluem-se, ainda, dois anexos: o primeiro consiste na justificação matemática do paradoxo geométrico, referido na secção 1.1; o segundo corresponde a 3 dos 28 problemas, relacionados com a sucessão de Fibonacci, e disponibilizados na página Web, no separador "Problemas (7^0, 8^0 e 9^0 anos)".

1.1. A Sucessão de Fibonacci numa página Web

Uma das atividades que me propus a concretizar foi a criação da página Web "A sucessão de Fibinacci, adaptada ao 3^0 ciclo do ensino básico". Ao explorarem esta página, os alunos, além de encontrarem problemas relacionados com a sucessão de Fibonacci, que vão ao encontro dos programas do 3º ciclo de ensino básico, atualmente em vigor, também encontrarão uma grande variedade de curiosidades e atividades interativas sobre esta sucessão que, certamente, os motivarão para novas aprendizagens e descobertas.



A criação desta página foi um trabalho contínuo e intenso que se iniciou logo com arranque do ano letivo. Duma forma muito resumida, destaco o facto desta página além de conter uma vertente lúdica e interativa é também composta por uma série de problemas relacionados com a sucessão de Fibonacci e com todos os conteúdos, atualmente em vigor, dos programas do 3^0 ciclo do ensino básico.

A elaboração destes problemas são fruto de uma auto recriação, resultado de uma enorme pesquisa, onde foi fundamental o material de apoio ao professor, disponibilizado pela Porto Editora [4].

Ao acederem à página, os alunos deparam-se imediatamente com "A sucessão de Fibonacci, adaptada ao 3^0 ciclo do Ensino Básico", em que a ênfase é dada aos cinco tópicos seguintes: Início, Fibonacci e a Natureza, Problema Interativos, Problemas (7^0, 8^0 e 9^0 anos) e Diversas Curiosidades.

Início

Neste campo é apresentado, aos alunos, o objetivo e o porquê da criação desta página Web. Dá-se um especial destaque ao matemático Fibonacci, apresentado-se uma aplicação interativa, criada por mim, composta por várias imagens de Matemáticos, em que os alunos são levados a descobrir, de entre as imagens apresentadas, qual delas é a de Fibonacci. Apresenta-se, ainda, uma breve biografia de Fibonacci e a definição de Número de Fibonacci.

Terminamos este separador, apresentando um paradoxo geométrico, descrito por W.W. Rouse Bola em *"Mathematical Recreations and Essays"*, como *"uma das jóias da matemática recreativa"*.

Ao entrar neste separador, os alunos têm acesso à justificação matemática deste paradoxo geométrico (adaptada ao nível de ensino básico), sendo que a justificação geral deste paradoxo é apresentada no Anexo 1.

Os alunos podem, ainda, aceder a diversas adaptações deste paradoxo geométrico em truques de ilusão ótica, bem como a alguns programas de divulgação matemática, como por exemplo, o programa televisivo *"Isto é Matemática"*.

Fibonacci e a Natureza

Nesta página os alunos poderão fazer uma viagem pela Natureza e descobrirem de que forma podem encontrar os números de Fibonacci no mundo que nos rodeia.

Destaca-se o facto do número de pétalas de certas flores, o crescimento de certas plantas, ou a vida das abelhas poderem relacionar-se com os números de Fibonacci. Apresenta-se a definição de espiral, adaptada ao nível do ensino básico, e descreve-se a construção da espiral de Fibonacci. Exibe-se uma animação, retirada de site GeoGebraTube [5], onde os alunos podem observar a construção da espiral de Fibonacci e verificarem que esta é uma boa modelação das conchas dos moluscos Nautilus.

Neste separador destaca-se, ainda, o facto do número de espirais, em certos seres vivos, estar também relacionado com os números de Fibonacci. Como exemplos ilustrativos, são apresentados o número de espirais, em geral, existentes na disposição das sementes do girassol, nas escamas hexagonais da casca do ananás e nas pinhas.

Neste separador os alunos podem, também, fazer uma viagem pelo número de ouro, descobrindo de que forma os números de Fibonacci estão relacionados com este número e qual o contributo dado por Leonardo Da Vinci (1452-1519) nas suas obras de arte, para a sua divulgação.

Para os alunos mais curiosos é apresentado, também, o trabalho de Diogo José Matos de Fernandes [6], sobre a sucessão de Fibonacci e o número de ouro, que compila várias curiosidades sobre esta temática.

Aplicações interativas

Nesta página os alunos podem aceder a várias aplicações interativas, produzidas pela Ludoteca do Instituto de Física da USP [7] e que são de software livre.

Além das simulações digitais, envolvendo o *"Problema dos Coelhos"*, o *"Problema dos Tijolos"* e a relação entre os números de Fibonacci e o número de ouro, os alunos podem aceder às explicações destes problemas. Podem, também, responder a esses problemas de uma forma lúdica e divertida, aplicando de forma interativa os conceitos de número do Fibonacci e do número de ouro.

Problemas(7^0, 8^0 e 9^0 anos)

Esta página é, a meu ver, a mais importante no ponto de vista científico, tendo sido o mais difícil de concretizar. Os alunos podem aceder a diversos problemas envolvendo a sucessão de Fibonacci. Todos os problemas propostos estão relacionados com os conteúdos, atualmente em vigor, nos programas do 3º ciclo do ensino básico. Para acederem aos problemas, os alunos escolhem o ano que pretendem (7^0, 8^0 ou 9^0 anos) e de imediato terão acesso a uma série de problemas (um exemplar de cada ano, no Anexo 2).

A nível do 7^0 ano, os programas, atualmente em vigor, abordam nos domínios –números, operações e álgebra– os números racionais, as raízes quadradas e cúbicas, e a resolução de equações do primeiro grau. No domínio –funções, sequências e sucessões– são abordados os conceitos de função e de sucessão, bem como algumas operações entre elas. No domínio –geometria e medida– são abordados os triângulos, os quadriláteros, o teorema de Tales e os critérios de semelhança de triângulos, que estão na base de numerosas demonstrações geométricas, que fazem atualmente parte das novas metas curriculares. No domínio –organização e tratamento de dados– além de organizar, analisar e interpretar dados, os programas abordam, ainda, algumas medidas de localização. Neste sentido, foram criados sete problemas envolvendo os números de Fibonacci e cada um dos seguintes tópicos: números racionais; funções; sequências, sucessões e regularidades; triângulos e quadriláteros; equações; semelhanças e tratamento de dados.

A nível do 8^0 ano, no domínio –geometria– os programas, atualmente em vigor, abordam as isometrias sem pontos fixos, o estudo elementar de vetores, medidas de área de superfície e de volume e o teorema de Pitágoras. Neste ano de escolaridade aprofundam-se algumas noções de estatística, o estudo dos números racionais, das funções lineares e afins, bem como das sequências e regularidades. Estudam-se, ainda, equações literais, a resolução de sistemas de duas equações do 1º grau a duas incógnitas, equações incompletas do 2º grau, e abordam-se alguns procedimentos próprios da álgebra no quadro das propriedades dos monómios e polinómios. Neste sentido, foram criados oito problemas envolvendo os números de Fibonacci e cada um dos seguintes tópicos: isometrias; números racionais; planeamento estatístico; funções; equações e sistemas de equações; sólidos geométricos; sequências e regularidades e teorema de Pitágoras.

A nível do 9^0 ano, os alunos têm o primeiro contacto com as probabilidades e com alguns fenómenos aleatórios. Nos domínios –números, operações e álgebra– os programas, atualmente em vigor, abordam os números reais, as equações do segundo grau e as inequações do primeiro grau. No domínio –geometria– são abordados os ângulos e circunferências. Além disso, são estudadas razões trigonométricas de ângulos agudos. No domínio –funções– os programas abordam as funções de proporcionalidade inversa e algumas funções quadráticas. Neste sentido, foram criados sete problemas envolvendo os números de Fibonacci e cada um dos seguintes tópicos: probabilidades; funções; equações; circunferência; números reais, trigonometria no triângulo retângulo e um problema global, envolvendo todos os tópicos anteriores.

Diversas Curiosidades

Nesta página os alunos podem aceder a diversas curiosidades sobre e/ou relacionadas com a sucessão de Fibonacci. Uma das curiosidades apresentadas é um truque aritmético envolvendo os números de Fibonanci. Neste separador é descrito o truque e apresenta-se a justificação matemática do mesmo, numa linguagem acessível aos alunos deste nível de escolaridade. Outra curiosidade apresentada é um excerto do Filme *"Código da Vinci"* onde, na cena, se faz referência a um código que, colocado na ordem correta, corresponde à sequência de Fibonacci.

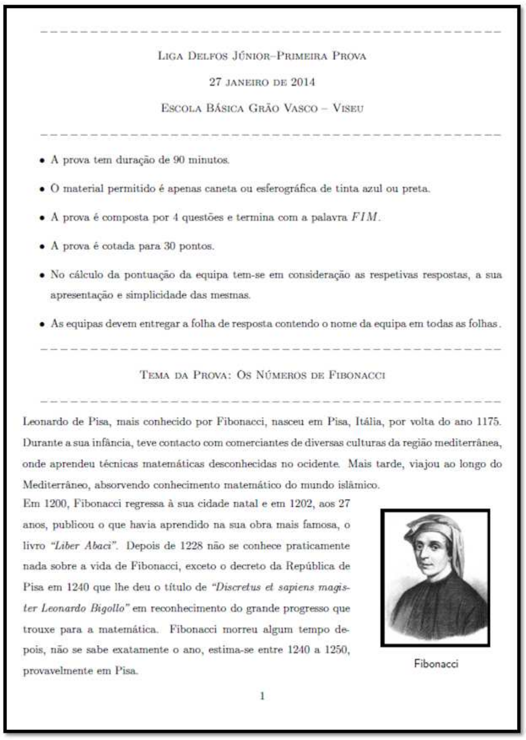
Terminamos esta página fazendo referência a dois vídeos. O primeiro aborda além de outras coisas, os números de Fibonacci e a História da Matemática, o segundo é o documentário *"A Espiral– parte 2"*, que apresenta a espiral duma forma muito peculiar e fascinante.

1.2. A Sucessão de Fibonacci na Liga Delfos Júnior

A Liga Delfos Júnior é uma competição de equipas integrada nas atividades do Projeto Delfos. Esta Liga esteve aberta a todos os alunos do 3^0 ciclo da escola básica Grão Vasco, interessados em Matemática elementar. Nesta primeira temporada, a liga decorreu entre os meses de janeiro e maio, e contou com a participação de seis equipas, compostas por quatro alunos, sendo que cada equipa tinha, pelo menos, um aluno do 7º, 8º e 9º anos.

Esta competição realizou-se mensalmente e consistia na resolução (em equipa) de provas de índole matemático. Cada prova iniciava-se com uma breve biografia de um matemático (relacionado com o tema da prova) e consistia na resolução de um conjunto de quatro problemas, visando fomentar a aprendizagem de um tema da Matemática, promovendo-se, assim, a transmissão de conhecimentos, e fortalecendo os laços de aprendizagem entre os diferentes alunos.

O tema da primeira prova da Liga, realizada a 27 de janeiro de 2014, foi *"Os números de Fibonacci"* e teve uma duração de 90 minutos. Com esta atividade, pretendeu-se que os alunos, entre si, discutissem e percebessem a construção dos números de Fibonacci (note-se que, na data de realização desta prova, ainda não se tinha abordado esta temática nas aulas).



LIGA DELFOS JÚNIOR–PRIMEIRA PROVA

27 JANEIRO DE 2014

ESCOLA BÁSICA GRÃO VASCO – VISEU

- A prova tem duração de 90 minutos.
- O material permitido é apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- A prova é composta por 4 questões e termina com a palavra FIM.
- A prova é cotada para 30 pontos.
- No cálculo da pontuação da equipa tem-se em consideração as respetivas respostas, a sua apresentação e simplicidade das mesmas.
- As equipas devem entregar a folha de resposta contendo o nome da equipa em todas as folhas.

TEMA DA PROVA: OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, nasceu em Pisa, Itália, por volta do ano 1175. Durante a sua infância, teve contacto com comerciantes de diversas culturas da região mediterrânea, onde aprendeu técnicas matemáticas desconhecidas no ocidente. Mais tarde, viajou ao longo do Mediterrâneo, absorvendo conhecimento matemático do mundo islâmico.

Em 1200, Fibonacci regressa à sua cidade natal e em 1202, aos 27 anos, publicou o que havia aprendido na sua obra mais famosa, o livro *"Liber Abaci"*. Depois de 1228 não se conhece praticamente nada sobre a vida de Fibonacci, exceto o decreto da República de Pisa em 1240 que lhe deu o título de *"Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo"* em reconhecimento do grande progresso que trouxe para a matemática. Fibonacci morreu algum tempo depois, não se sabe exatamente o ano, estima-se entre 1240 a 1250, provavelmente em Pisa.

Fibonacci

1

A fim de relacionar o tema com outras áreas da matemática, tentou-se elaborar uma prova, envolvendo e relacionando a sucessão de Fibonacci com a geometria, a lógica matemática e a teoria dos números, cujas questões são apresentadas a seguir.

Questão 1.

Considerem um quadrado com medida de lado igual a uma unidade e a sucessão (F_n), de termo geral F_n, obtida tal como se descreve (ver Figura 1):

- A medida do lado do quadrado é o primeiro termo da sucessão: $F_1 = 1$.
- Justapondo um quadrado igual ao anterior, obtém-se um retângulo cujas medidas dos lados são 1 e 2. A medida do menor lado deste retângulo é o segundo termo da sucessão: $F_2 = 1$.
- Um novo retângulo é construído justapondo ao anterior um quadrado de lado igual ao maior lado do retângulo anterior. A medida do menor lado deste retângulo é o terceiro termo da sucessão: $F_3 = 2$.
- Repetindo o processo, obtém-se uma sucessão de retângulos (Retângulos de Fibonacci– Figura 1), em que as medidas dos menores lados de cada um dos retângulos correspondem aos termos da sucessão (F_n).

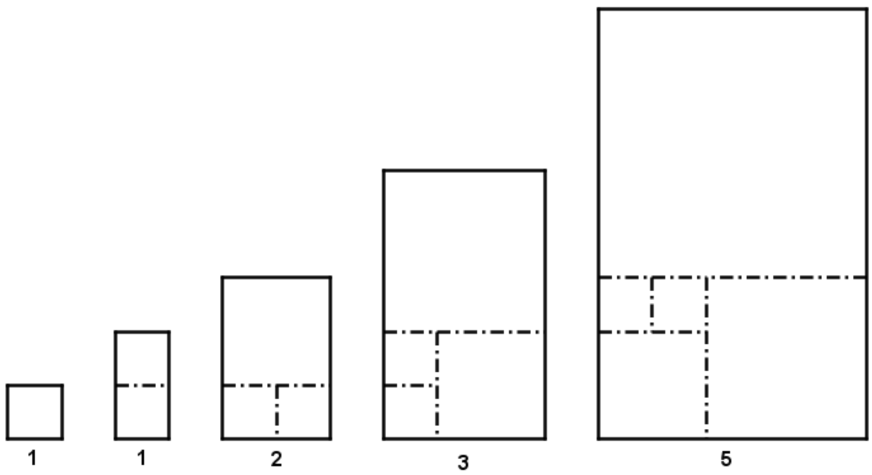


Figura 1: Retângulos de Fibonacci

A sucessão (F_n), é conhecida na literatura por Sucessão de Fibonacci e os seus termos são os Números de Fibonacci.

Determinem a medida do perímetro correspondente ao 6º Retângulo de Fibonacci.

Questão 2.

Partindo da sucessão de retângulos da Questão 1, construíu-se uma espiral (conhecida na literatura, por Espiral de Fibonacci), através da construção sucessiva de arcos (quartos) de circunferência, tal como sugere a Figura 2.

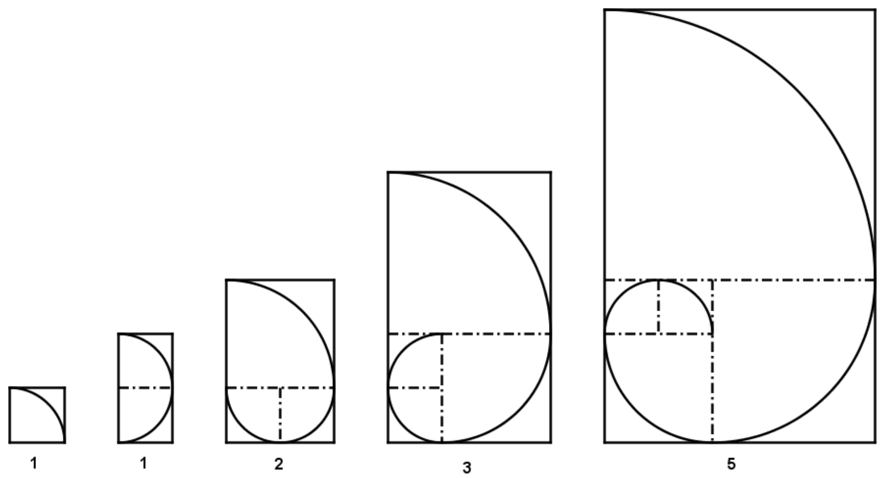


Figura 2: Construção da Espiral de Fibonacci

A Espiral de Fibonacci, assim construída, expressa movimento, uma vez que se prolonga até ao infinito. Notem que os raios dos quartos de circunferência correspondem aos termos da sucessão de Fibonacci.

Considerem a espiral $\mathcal{E}$ em que o último arco desenhado tem medida de comprimento 4π. Qual a medida de comprimento da espiral $\mathcal{E}$? Justifiquem convenientemente a vossa resposta.

Questão 3.

Considerem um código secreto, em que cada letra corresponde a um número de Fibonacci com um, dois ou três algarismos. Tendo em conta que o código que corresponde à letra *D* é *13*; à letra *G* é *610* e que a frase *DESCOBRE NA LIGA DELFOS* está codificada por

1321834552121 144377 53610377 13215233558,

codifiquem a palavra *FIBONACCI*.

Questão 4.

Os números de Fibonacci podem ser definidos por recorrência em que cada termo, com exceção dos dois primeiros termos, é a soma dos dois termos que o precedem, isto é,

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n = 3, 4, 5, \ldots .$$

Assim,

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2;$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3;$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5;$

$\ldots$

São inúmeras as propriedades matemáticas que os números de Fibonacci satisfazem. Seguidamente são apresentadas duas dessas propriedades.

<u>Propriedade 1</u>:

Dados dois números inteiros positivos m e n, o número de Fibonacci F_m divide o número de Fibonacci $F_{m\times n}$.

<u>Propriedade 2</u>:

Dados dois números inteiros positivos m e n, o máximo divisor comum dos números de Fibonacci F_m e F_n coincide com o número de Fibonacci F_d, onde d é o máximo divisor comum entre m e n. Isto é, $m.d.c\,(F_m, F_n) = F_{m.d.c(m,n)}$.

Tendo em conta a Propriedade 1, justifiquem que o número de Fibonacci F_{111} é par; e, tendo em conta a Propriedade 2, justifiquem que os números de Fibonacci F_{15} e F_{28} são números primos entre si.

FIM

_ _

1.3. A Sucessão de Fibonacci numa aula do 7º ano

Um dos conteúdos abordados atualmente nos programas do 7^0 ano é "Sequências, sucessões e regularidades". Neste ano de escolaridade, os alunos devem começar a utilizar corretamente as expressões *"termo de ordem n da sucessão (sequência)"* e *"termo geral da sucessão (sequência)"*, bem como determinarem o termo geral de sequências (sucessões) numéricas.

Como é defendido nas novas metas curricular [4], o professor deve *"proporcionar aos alunos a resolução de problemas e modelação de situações, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente"* e, sempre que possível, o professor deve *"estabelecer a conexão do tema com as distintas áreas da matemática"*.

A fim de dar resposta a estas orientações, numa das aulas que lecionei, a 29 de janeiro de 2014, sobre sequências e sucessões, numa turma do 7^0 ano, composta por 28 alunos, introduzi a sucessão de Fibonacci e mostrei um vídeo, produzido pela Porto Editora, que falava sobre esta sucessão. Criei uma atividade matemática (ficha de trabalho) onde tentei relacionar a sucessão de Fibonacci com a geometria e a lógica matemática, fazendo assim, uma abordagem diferente da habitual, evitando que o tema fosse apresentado como um conjunto de regras e procedimentos a memorizar.

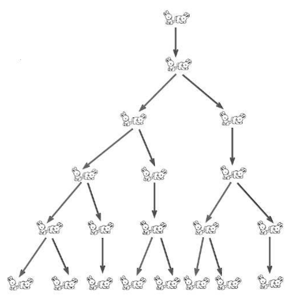
Os problemas foram discutidos e resolvidos durante a aula e procurou-se suscitar a curiosidade dos alunos. Para tal, utilizou-se sempre que pertinente, a técnica do questionário, tentando-se criar oportunidades de trabalho onde estivessem presentes os diversos tipos de interação (professor-aluno, aluno-turma, professor-turma).

Os problemas abordados nesta atividade são apresentados a seguir.

Problema 1.

Fibonacci analisou no seu livro *Liber Abaci* (1202) o seguinte problema:

"Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida?"



Assumindo que todos os coelhos são imortais, responde às seguintes questões:

(a) Quantos pares de coelhos existem no 7º mês?

(b) Qual a solução do problema de Fibonacci?

Problema 2.

Considera os 7 termos consecutivos da sucessão de Fibonacci

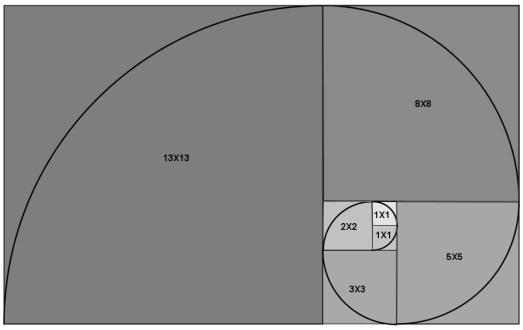
$$\ldots \quad (A) \quad 21 \quad 34 \quad (B) \quad 89 \quad 144 \quad (C) \quad \ldots$$

Determina os termos (A), (B) e (C).

Problema 3.

Justapondo dois quadrados com medida de comprimento de lado igual a 1, obtém-se um retângulo do tipo 2×1 (isto é, tal que as medidas dos comprimentos dos lados são 2 e 1), sendo a medida de comprimento do maior lado igual à soma das medidas dos comprimentos dos lados dos quadrados iniciais.

Justapondo agora outro quadrado com medida de comprimento de lado igual a 2 (a medida de comprimento do maior lado do retângulo 2×1), teremos um retângulo 3×2. Continuando a justapor quadrados com medidas de comprimento de lados iguais à maior das medidas dos comprimentos dos lados dos retângulos obtidos no passo anterior, obtemos uma construção, como se ilustra na figura seguinte.



Unindo-se os arcos (quartos) de circunferência que se obtêm dos quadrados, unindo adequadamente vértices opostos destes, constrói-se uma espiral, designada por Espiral de Fibonacci.

(a) Determine a medida do comprimento da espiral de Fibonacci representada na figura.

(b) Considera a sequência, formada pelos 7 primeiros termos da sucessão de Fibonacci, $1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13$. Tendo em conta a construção anterior, justifica geometricamente, a igualdade

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \times 13 \,.$$

FIM

– –

1.4. A Sucessão de Fibonacci no programa Pedais 2014

O programa de enriquecimento curricular– Pedais 2014 – é uma parceria das Escolas da Zona Urbana de Viseu com a ANEIS (Associação Nacional para o Estudo e Intervenção na Sobredotação) que leva a cabo, durante o período de 8 de março a 6 de dezembro de 2014, diversas atividades envolvendo alunos portadores de algum tipo de sobredotação.

Os meninos que participaram neste programa, alunos das Escolas da Zona Urbana de Viseu, foram divididos em dois grupos distintos: o primeiro grupo, com 6 elementos, com idades compreendidas entre os 7 e os 9 anos, e o segundo grupo, com 8 elementos, com idades compreendidas entre os 11 e os 15 anos.

No âmbito deste programa, contribuí em duas sessões, uma no dia 10 de maio (das 10h30m às 13h), para os alunos dos 11 aos 15 anos, e outra no dia 24 de maio (das 10h30m às 13h), para os alunos dos 7 aos 9 anos.

Seguidamente, apresentam-se as planificações destas sessões, bem como uma ideia das atividades desenvolvidas.

Dia 10 de maio	Desenvolvimento da sessão
10h30m-11h	Exposição alusiva aos números de Fibonacci e apresentação da página Web.
11h-12h	Exploração da página Web, por parte dos alunos: resolução de problemas e aplicações interativas.
12h-12h30m	Truques e curiosidades matemáticas sobre os números de Fibonacci: o paradoxo geométrico e um truque aritmético.
12h30m-13h	Alguns jogos matemáticos.

Dia 24 de maio	Desenvolvimento da sessão
10h30m-11h	Exposição alusiva aos números de Fibonacci e apresentação da página Web (parte interativa).
11h-12h	Exploração da página Web, por parte dos alunos (aplicações interativas).
12h-12h30m	Truques e curiosidades matemáticas sobre os números de Fibonacci: Fibonacci e a natureza, e um truque com cartas.
12h30m-13h	Alguns jogos matemáticos.

Antes de explorarem a página Web, os alunos realizaram a atividade *"Quem é Fibonacci?"*. Durante as sessões foi possível os alunos explorarem livremente a página Web, bem como concretizarem alguns dos problemas e desafios nela abordados.

Para exemplificar o paradoxo geométrico foram construídos, em cartão, vários "Puzzles" para tornarem o paradoxo mais percetível.

Relativamente ao truque aritmético, relacionado com a sucessão de Fibonacci, foi utilizado um Ábaco e também uma máquina de calcular.

No problema interativo, *"Problema dos Tijolos"*, foi proposto um desafio aos alunos: ver qual deles seria o mais rápido a construir 13 paredes com 6 tijolos.

Para comprovar a existência dos números de Fibonacci na Natureza, foram utilizadas várias pinhas e um ananás.

As sessões terminaram fazendo referência ao filme *"O Código da Vinci"* e ao documentário *"Espiral– parte 2"*.

1.5. Reflexão sobre as atividades desenvolvidas

Após a realização de todas estas atividades, alusivas à sucessão de Fibonacci, penso que os objetivos principais inerentes à disciplina, Projeto Educacional II, foram plenamente cumpridos.

Alguns dos resultados, que foram demonstrados no Projeto Educacional I, foram, também, apresentados aos alunos dos diferentes anos do ensino básico, duma forma lúdica e divertida, tendo sido possível adaptá-los a um nível científico adequado aos conteúdos programáticos atualmente em vigor.

A criação da página Web, alusiva à sucessão de Fibonacci, permitiu que as aplicações sobre este tema não se tenham restringido a um determinado tempo e espaço, podendo ser utilizadas em anos letivos posteriores, com convenientes adaptações, de acordo com possíveis alterações dos conteúdos curriculares.

De uma forma geral, penso que as atividades que levei a cabo foram do interesse de grande parte dos alunos, e despertaram, em grande parte deles, a vontade de conhecer e explorar novos assuntos.

Na atividade "A Sucessão de Fibonacci na Liga Delfos Júnior", pude constatar o grande entusiasmo com que cada equipa discutia e tentava justificar as respostas aos problemas propostos, para poder obter a melhor classificação no *ranking*. Poder-se-á dizer que esta primeira prova despertou e veio acentuar o caracter competitivo desta Liga, sendo os resultados obtidos pelas equipas, nesta prova, bastante positivos e não muito díspares.

Na atividade "A Sucessão de Fibonacci numa aula do 7º ano", tentei aplicar, ainda que de uma forma muito geométrica, alguns dos resultados demonstrados no Projeto Educacional I. O resultado, a meu ver, foi muito surpreendente, pois notei que a maioria dos alunos da turma, não só conseguiu compreender a construção dos números de Fibonacci, como também conseguiu conjeturar um resultado geral [1, Proposição 1.1], após terem concluído geometricamente a igualdade $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2 = 8\times 13$.

A atividade "A Sucessão de Fibonacci numa página Web"permitiu-me não só fazer uma grande pesquisa sobre o tema, como também criar uma grande variedade de problemas. A divulgação desta página Web foi feita quer na escola, quer em algumas redes sociais, e tem tido um *feedback* muito positivo.

O meu envolvimento no programa "Pedais 2014", permitiu-me, além da divulgação da página Web, explorar algumas curiosidades e truques sobre a sucessão de Fibonacci. Pude também constatar o interesse e o entusiasmo dos alunos sobre o tema, bem como a sua primeira reação à página Web criada.

Este foi um árduo trabalho, que espero que chegue a muitos alunos do ensino básico e que não fique, no futuro, apenas registado como *"Projeto Educacional II"*.

Apêndice

Os números de Fibonacci e a geometria paradoxal

Na disciplina, Projeto Educacional I, deduzimos a Fórmula de Cassini que estabelece a seguinte identidade entre os números de Fibonacci:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{A.1}$$

Esta identidade permite justificar dois fascinantes paradoxos geométricos, que iremos designar por paradoxo do primeiro tipo (quando n é par) e por paradoxo do segundo tipo (quando n é ímpar) .

Paradoxo do primeiro tipo

O paradoxo do primeiro tipo era um dos favoritos do famoso inglês Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), mais conhecido pelo seu pseudónimo, Lewis Carroll [2, 3].

Este paradoxo, proposto pela primeira vez em 1774 por William Hooper em *"Rational Recreations"*, reapareceu em 1868, após Fibonacci publicar o seu problema com coelhos.

Considere-se um quadrado de 8×8 (isto é, tal que as medidas dos comprimentos dos lados são iguais a 8), corte-se este quadrado em quatro partes, A, B, C, e D, como na Figura 1.

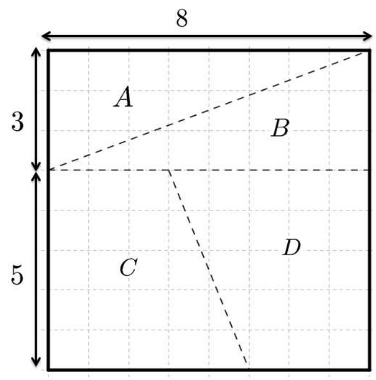


Figura 1: Quadrado 8×8.

Agora, reorganizem-se as peças para formar um retângulo do tipo 5×13 (isto é, tal que as medidas dos comprimentos dos lados são 5 e 13), como na Figura 2.

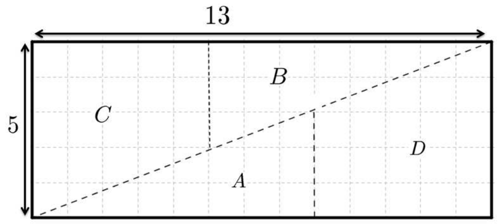


Figura 2: Retângulo 5×13.

Enquanto a medida da área do quadrado é de 64 unidades (Figura 1), a do retângulo é de 65 unidades (Figura 2). Como isso é possível? A resposta a esta questão será apresentada a seguir.

Na Figura 2, verifica-se que a *"diagonal do retângulo"* é uma linha (segmento) mas, na verdade, essa aparência é falaciosa. Os pontos P, Q, R, e S assinalados na Figura 3 (imagem à esquerda) não são colineares como aparentam ser, mas são de facto, os vértices de um paralelogramo muito estreito, Figura 3 (imagem à direita).

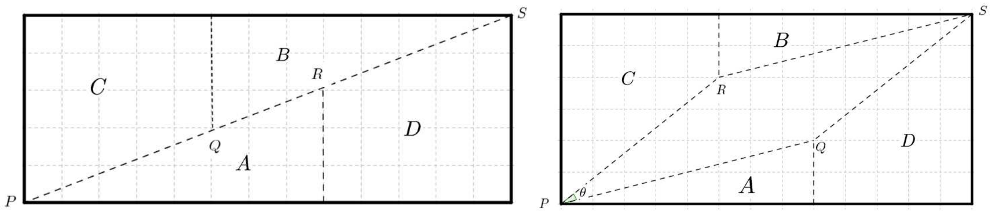


Figura 3: À esquerda a *"diagonal do retângulo"* e à direita o paralelogramo ampliado.

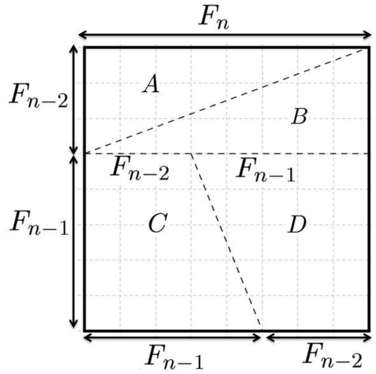
A medida da área do paralelogramo é igual à diferença entre as medidas das áreas do retângulo e do quadrado, isto é, $65 - 64 = 1$. Denotando os números de Fibonacci de ordem n por F_n, como no Projeto Educacional I, podemos observar que a medida da área do paralelogramo é $F_7 F_5 - F_6^2 = 1$ unidade.

Observação A.1. *Note-se que a medida do lado do quadrado inicial (Figura 1) bem como as medidas dos lados do retângulo (Figura 2) são respetivamente os números de Fibonacci* $F_6 = 8$, $F_5 = 5$ *e* $F_7 = 13$. *Tendo em conta as medidas dos lados do retângulo, pode-se concluir que as medidas dos lados do paralelogramo são* $\sqrt{29}$ *e* $\sqrt{73}$ *e que a medida de comprimento da sua maior diagonal é* $\sqrt{194}$. *Designando por* θ *a medida da amplitude do ângulo agudo, formado pelos dois lados adjacentes do paralelogramo (Figura 3– imagem à esquerda), conclui-se, pela lei dos cossenos, que*

$$\cos(\theta/2) = \frac{194 + 29 - 73}{2\sqrt{29 \times 194}} \approx 0.763898460833 \Longrightarrow \theta \approx 1^o 31' 40''$$

o que explica o facto do paralelogramo tão estreito.

Uma vez que, quando n é par, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = 1$, este quebra cabeças pode ser extendido a qualquer quadrado do tipo $F_n \times F_n$. Assim, cortando este quadrado em quatro peças, como na Figura 4 (imagem à esquerda) e reorganizando as peças obtemos um *"enganoso"* retângulo do tipo $F_{n-1} \times F_{n+1}$, Figura 4 (imagem à direita).



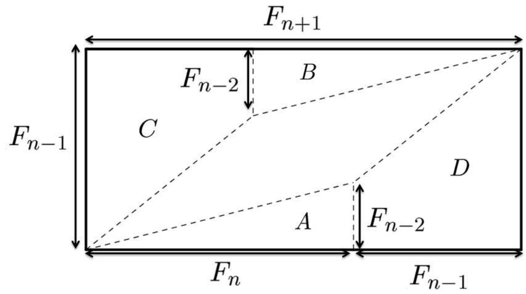


Figura 4: À esquerda quadrado $F_n \times F_n$ e à direita *"enganoso"* retângulo $F_{n-1} \times F_{n+1}$.

O paralelogramo, que está ampliado na figura, tem como medida de área uma unidade e altura $h = \dfrac{1}{\sqrt{F_n^2 + F_{n-2}^2}}$.

Assim, quanto maior for a medida do lado do quadrado original mais estreito se torna o paralelogramo e por conseguinte menos percetível.

Em 1962, A. F. Horadam deduziu a fórmula para $\operatorname{tg}\theta_n$ [2], onde θ_n denota a medida de amplitude do ângulo agudo entre os lados adjacentes do paralelogramo, com n par e $n \geq 4$, como ilustra a Figura 5.

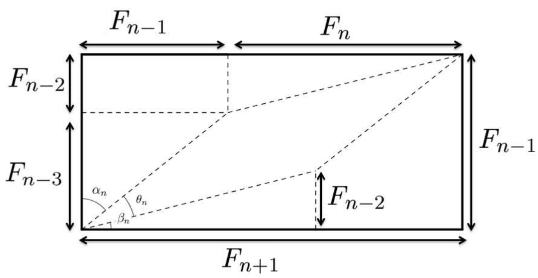


Figura 5: Paralelogramo ampliado.

Tendo em conta os dados da Figura 5,

$$\begin{aligned}\theta_n &= \frac{\pi}{2} - (\alpha_n + \beta_n)\\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}} - \operatorname{arctg}\frac{F_{n-2}}{F_n}\\ &= \operatorname{arctg}\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} - \operatorname{arctg}\frac{F_{n-2}}{F_n} \qquad \left(\text{uma vez que } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

e, além disso,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\theta_n &= \frac{(F_{n-3}/F_{n-1}) - (F_{n-2}/F_n)}{1 + (F_{n-3}/F_{n-1}) \times (F_{n-2}/F_n)} \\
&= \frac{F_{n-3}F_n - F_{n-1}F_{n-2}}{F_{n-1}F_n + F_{n-3}F_{n-2}} \\
&= \frac{F_{n-3}\,(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-2}\,(F_{n-2} + F_{n-3})}{F_{n-1}\,(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-3}F_{n-2}} \\
&= \frac{F_{n-1}F_{n-3} - F_{n-2}^2}{F_{n-1}^2 + F_{n-2}\,(F_{n-2} + F_{n-3}) + F_{n-3}F_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-2}}{F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + 2F_{n-3}F_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^n}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} \quad \text{(pela identidade (1.8) do Projeto Educacional I)} \\
&= \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} \quad \text{(uma vez que } n \text{ é par)}
\end{aligned}
$$

Paradoxo do segundo tipo

Para ilustrarmos o paradoxo do segundo tipo, consideremos um quadrado do tipo 5×5, cortado em quatro peças, como ilustra a Figura 6 (à esquerda).

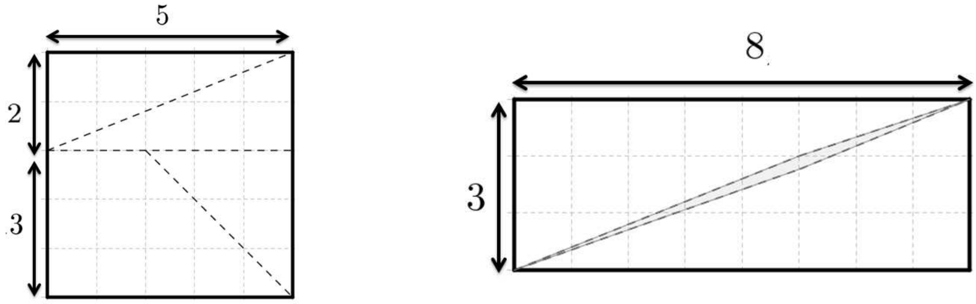
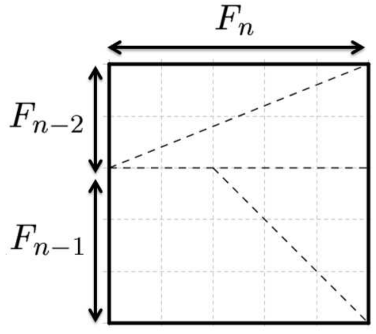


Figura 5: À esquerda o quadrado 5×5 e à direita o *"enganoso"* retângulo 3×8.

Reorganizando as quatro peças, obtém-se um *"enganoso"* retângulo do tipo 3×8 como na Figura 5 (à direita). A medida da área do quadrado inicial é 25 unidades, enquanto que a medida da área do retângulo é 24 unidades (menos uma unidade).

Note-se que a medida da área do quadrado inicial é $F_5^2 = F_4F_6 + 1$, isto é, igual à medida da área do retângulo mais um.

Generalizando a construção para n arbitrário e ímpar, considere-se um quadrado do tipo $F_n \times F_n$, cortado em quatro peças como na Figura 6 (à esquerda).



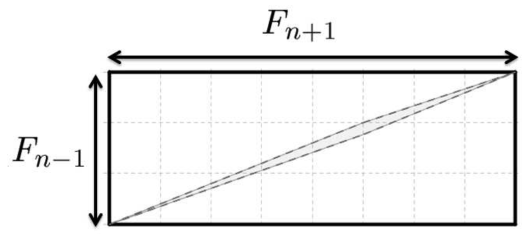


Figura 6: À esquerda quadrado 5×5 e à direita o *"enganoso"* retângulo 3×8.

Reorganizando-se as quatro peças, obtemos um "retângulo" do tipo $F_{n-1} \times F_{n+1}$ (Figura 6 à direita). Como n é ímpar, tendo em conta a identidade de Cassini (A.1), concluímos que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -1$, isto é, a medida da área do retângulo é menos uma unidade do que a medida da área do quadrado.

Como no paradoxo do primeiro tipo, quanto maior for o valor de n, mais estreito será o paralelogramo. De facto, designado por θ_n, a medida de amplitude do ângulo agudo entre os lados adjacentes do paralelogramo, como n ímpar e $n \geq 3$ (Figura 7)

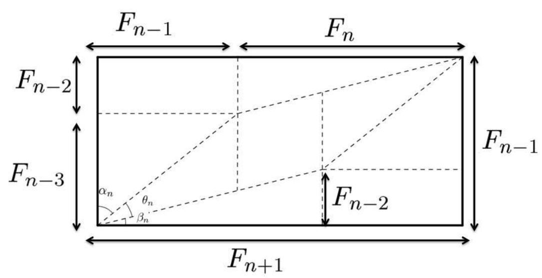


Figura 7: Paralelogramo ampliado.

obtém-se

$$\theta_n = (\alpha_n + \beta_n) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}} + \operatorname{arctg}\frac{F_{n-2}}{F_n} - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\frac{F_{n-2}}{F_n} - \operatorname{arctg}\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} .$$

e, além disso,

$$\operatorname{tg}\theta_n = \frac{(-1)^{n-1}}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} = \frac{1}{F_{2n-3} + 2F_{n-3}F_{n-2}} \text{ (uma vez que } n \text{ é ímpar)} .$$

Apêndice

Alguns problemas adaptados ao 3^0 ciclo do ensino básico

7º Ano

8º Ano

9º Ano

PROBLEMA: FUNÇÕES (7º ANO)

Por repetição, utilizando as letras, F I B O N A C C I, foi construída a sucessão

F I B O N A C C I F I B O N A C C I F I B O N A C C ...

1. Considera a função f que a cada número natural, n, faz corresponder a letra correspondente ao termo de ordem n da sucessão referida.

   (a) Determina $f(5)$ e $f(89)$.

   (b) Seja g uma função de domínio $D = \{5, 89, 233\}$ e tal que $g(x) = f(x)$ (para x pertencente ao domínio D). Admitindo que o contradomínio de g coincide com o seu conjunto de chegada, representa a função g por um diagrama de setas.

   (c) Comenta a seguinte afirmação:

   "a correspondência que, a cada letra (correspondente ao termo de ordem n da sucessão referida) faz corresponder o número natural n, é uma função."

2. Considera todas as funções

$$h: \quad \{F,\ I,\ B,\ O,\ N,\ A,\ C\} \longrightarrow \{C,\ I\}$$

   de domínio $\mathcal{D} = \{F,\ I,\ B,\ O,\ N,\ A,\ C\}$ e conjunto de chegada $\mathcal{E} = \{C,\ I\}$.

   Quantas funções existem?

3. Considera a sequência formada pelos cinco primeiros termos da sucessão de Fibonacci (F_n), isto é, $1, 1, 2, 3, 5$.
   Seja f a função afim de coeficiente da variável $-\dfrac{F_2}{F_4}$ e termo independente $-F_1$, e a função linear h, definida por

$$h(x) = \frac{F_1}{F_3} - \frac{F_2}{F_4}\left(x + \frac{F_4}{F_3}\right) + \frac{F_3}{F_4}x\ .$$

   (a) Escreve as funções f e h na forma canónica.

   (b) Mostra que $f + h$ é uma função constante.

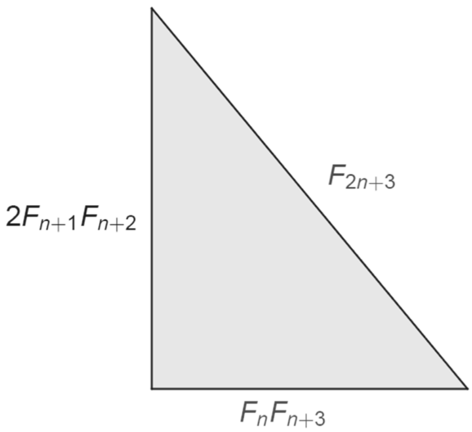
   (c) Determina o valor exato de $\sqrt[3]{((f+h)\times h)\left(\dfrac{1}{9}\right)}$.

Problema: Teorema de Pitágoras (8^{o} Ano)

1. Em 1984, Charles Raine observou que, tomando quaisquer quatro números consecutivos da sucessão de Fibonacci (F_n), isto é,

$$F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$$

o produto dos termos extremos, F_nF_{n+3}, e duas vezes o produto dos termos internos, $2F_{n+1}F_{n+2}$, representam as medidas dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo, sendo a medida do comprimento da hipotenusa o número de Fibonacci F_{2n+3}.



Assim, $(F_nF_{n+3}, 2F_{n+1}F_{n+2}, F_{2n+3})$ é uma tripla pitagórica.

Considera a sucessão de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

(a) Escolhe quatro termos consecutivos desta sucessão e verifica a conclusão de Charles Raine.

(b) Tendo em conta a conclusão de Charles Raine, determina as medidas de comprimento dos catetos de um triângulo retângulo, cuja medida de comprimento da hipotenusa é o número de Fibonacci 233.

Problema: Números reais (9^o Ano)

Desde a antiguidade, há um número que vem sendo estudado por matemáticos e curiosos devido às suas extraordinárias propriedades. Este número ficou conhecido por número de ouro e é usualmente denotado pela letra grega Φ, em homenagem ao escultor Phidias (490-430 a.c). O número de ouro é um número irracional, com propriedades curiosas, cujo valor aproximado é $1,61803$.
Tornou-se célebre pela utilização que pintores e arquitetos da Antiguidade fizeram dele nas suas obras. Fibonacci, no seu livro *"De Divina Proportione"*, denominou-o de *"Proporção Divina"*.
O número de ouro é o único número positivo que verifica a seguinte relação

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \, .$$

1. Resolve esta equação e identifica o valor exato do número de ouro.

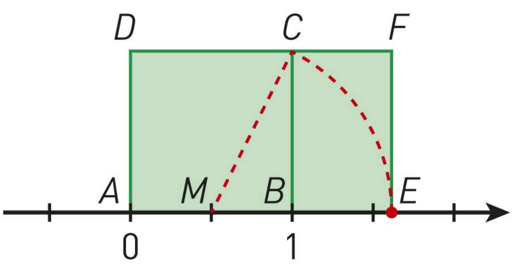
2. A fórmula explícita do número de Fibonacci de ordem n, F_n, é conhecida, na literatura, por fórmula de Binet, e estabelece que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \, .$$

   Tendo em conta a fórmula de Binet, mostra que $F_2 = 1$.

3. Considera a inequação $-\Phi \, x - \sqrt{5} \geq 1$.
   Resolve-a e representa na reta real o seu conjunto-solução.

4. Na figura, $ABCD$ é um quadrado com medida de comprimento de lado igual a 1, e M é o ponto médio do lado AB. Tal como a figura sugere, foi construído o retângulo $AEFD$.



   (a) Atendendo aos dados da figura, determina os números reais correspondentes aos pontos M e E.

   (b) Mostra que $\overline{AE} = \Phi$.

Bibliografia

[1] M. N. de Jesus: *Sucessão de Fibonacci e uma sua generalização*, Projeto Educacional I, Coimbra, 2014.

[2] Thomas Koshy: *Fibonacci and Lucas numbers with aplications*, pure and applied mathematics, a wiley-interscience series of texts, monographs and tracts, 2001.

[3] C. P dos Santos, J. P. Neto, J. N. Silva: *Sucessão de Fibonacci*, colecção jogos com história, 2008.

WebGrafia

[4] *http://www.portoeditora.pt/* (2014).

[5] *http://www.geogebratube.org/material/show/id/46870* (2014).

[6] *http://www.slideshare.net/DiogoFernandes/srie-de-fibonacci-e-o-nmero-de-ouro* (2014).

[7] *http://web.if.usp.br/ifusp/user/695* (2014).