	Escola Secundária com 3º Ciclo D. Dinis	

Problemas de Optimização. Aplicações das taxas de variação. Programação linear.

Ano Lectivo 2008 / 2009	*Matemática B*	*12º Ano, D+E*

1. Pretende-se fazer um canteiro, no jardim de uma escola, com a forma de um quadrado de 7 metros de lado.

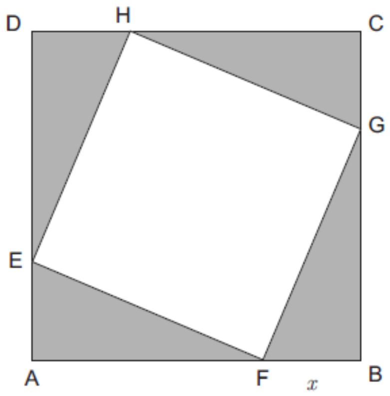


Fig. 1

A figura 1 representa um projecto desse canteiro, designado por $[ABCD]$, em que a região sombreada representa a zona que se pretende relvar, e o quadrado $[EFGH]$ representa o local destinado a plantar roseiras.
Tem-se, em **metros**:

$$\overline{AE} = \overline{FB} = \overline{GC} = \overline{HD} = x$$

1.1. Admita que $x = 3$. Pretende-se plantar 700 roseiras na zona reservada para esse efeito. Cada roseira necessita de uma área quadrangular com 20 **centímetros** de lado.
Será possível plantar as 700 roseiras nessa zona? Justifique.

1.2. Mostre que a área, a, da região relvada, em metros quadrados, é dada, em função de x, por

$$a(x) = 14x - 2x^2$$

Calcule $a(0)$ e interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

2. Nos itens seguintes, considere a função $a(x) = 14x - 2x^2$, definida no intervalo $[0;7]$, no contexto descrito no grupo de itens anterior.

2.1. Mostre que a taxa de variação média da função a, no intervalo $[3;4]$, é zero.

2.2. Do facto de a taxa de variação média da função a, no intervalo $[3;4]$, ser zero, podemos concluir que a função a é constante no intervalo $[3;4]$?
Justifique a sua resposta.

2.3. Atendendo ao orçamento existente, pretende-se que a zona relvada tenha a maior área possível.
Determine o valor de x para que tal aconteça.

(1ª fase - 2008)

3. Numa determinada região do interior, as chuvas torrenciais causaram inundações, e a região foi considerada zona de catástrofe. Os prejuízos acentuaram-se muito nas actividades agrícolas. Para enfrentar esta situação, os organismos ligados aos serviços agro-pecuários decidiram adquirir rações para animais. Foram pedidos, com urgência, dois tipos de ração: FarX e FarY.

A FARJO é uma fábrica especializada na produção destes tipos de ração. Estas rações contêm três aditivos: vitaminas, sabores e conservantes.

Por cada tonelada de ração do tipo FarX, são necessários dois quilogramas de vitaminas, um quilograma de sabores e um quilograma de conservantes.

Por cada tonelada de ração do tipo FarY, são necessários um quilograma de vitaminas, dois quilogramas de sabores e três quilogramas de conservantes.

A FARJO dispõe, diariamente, de 16 quilogramas de vitaminas, 11 quilogramas de sabores e 15 quilogramas de conservantes. Estas são as únicas restrições na produção destas rações.

Represente por x a quantidade de ração FarX produzida diariamente, expressa em toneladas, e por y a quantidade de ração FarY produzida diariamente, expressa em toneladas.

3.1. É possível a FARJO fabricar, num só dia, 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY? Justifique.

3.2. Quais são as quantidades de ração de cada tipo que devem ser produzidas, de modo que a quantidade total de ração produzida diariamente seja máxima?

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- indique os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

(2ª fase - 2008)

4. Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia eléctrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: energia de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de fuel, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período nocturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a $40 \quad MWh$.

Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida.

Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 80 euros.

Relativamente à energia eólica, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 90 euros;
- o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os $40 \quad MWh$.

Represente por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consumidas pela autarquia.
Determine que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:
- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível (referente ao sistema das restrições);
- indique os valores de x e y para os quais é mínima a função objectivo.

(1ª fase - 2007)

5. O campo de futebol de um dado clube tem uma bancada destinada a não sócios, que leva 4000 espectadores. Se o preço de cada bilhete for 10 euros, prevê-se que a lotação dessa bancada fique esgotada.
Com base em experiências anteriores, verifica-se que, se o preço de cada bilhete for aumentado numa certa percentagem, x, sobre o valor base (10 euros), o número de espectadores baixa metade dessa percentagem. Por exemplo, se o preço dos bilhetes aumentar 10%, $x = 0{,}1$, o número de espectadores sofre um decréscimo de 5%.
Admitindo a exactidão do modelo descrito e considerando sempre o aumento percentual, x, sobre o preço base (10 euros), responda às questões que se seguem.

5.1. Mostre que, se x for o aumento percentual do preço de cada bilhete para aquela bancada, num dado jogo, então a receita de bilheteira, R, é dada por:

$$R(x) = -20\,000x^2 + 20\,000x + 40\,000, \text{ com } 0 \leq x \leq 2$$

Tenha em atenção que:

- o preço de cada bilhete, p, em função do aumento percentual, x, é dado por $p(x) = 10(1+x)$;
- o número de espectadores, n, em função do aumento percentual, x, é dado por $n(x) = 4000 - 2000x$.

5.2. Um dos elementos da direcção do clube sugere que o preço de cada bilhete seja de 20 euros, para serem maximizadas as receitas de bilheteira. Porém, um segundo elemento da direcção opõe-se, dizendo que o ideal é manter o preço de cada bilhete a 10 euros, uma vez que as receitas de bilheteira são superiores se assim for.
Num pequeno texto, comente o argumento de cada um dos elementos da direcção do clube, tendo em conta o objectivo de maximizar as receitas de bilheteira.

Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:
- o valor da percentagem, x, que a direcção do clube deve aplicar sobre o preço base (10 euros), para que se maximizem as receitas de bilheteira, e o respectivo valor da receita (no caso de discordar da opinião de cada um dos elementos da direcção);
- um argumento, fundamentado, referente às propostas de cada um dos elementos da direcção, dizendo se concorda, ou não, com elas;
- todos os elementos recolhidos na utilização da sua calculadora gráfica que se tenham mostrado relevantes.

5.3. À entrada para o recinto do jogo, cada espectador, sócio ou não sócio, recebeu um cartão numerado para se habilitar a um sorteio. Estavam presentes 6825 espectadores, dos quais 40% eram não sócios. Foram sorteados, simultaneamente, dois números. Qual a probabilidade de ambos os contemplados serem sócios?
Apresente o resultado final com aproximação às centésimas.

(2ª fase - 2007)

6. A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no Dia dos Namorados.
Idealizaram arranjos formados por margaridas, rosas e violetas.
Dispõem de: 192 margaridas, 88 rosas e 112 violetas.
Pensaram formar dois tipos de arranjos: A e B.

Cada arranjo do tipo A:

- será composto por 16 margaridas, 4 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 3 euros.

Cada arranjo do tipo B:

- será composto por 8 margaridas, 8 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 2 euros.

1.1. A Isabel sugeriu que se fizessem 7 arranjos de cada tipo. O Dinis sugeriu que se fizessem 10 arranjos do tipo A e 5 do tipo B.
Averigúe se cada uma destas propostas é, ou não, viável, tendo em conta as flores disponíveis.
1.2. Determine o número de arranjos de cada tipo que os alunos devem produzir, para obterem o maior lucro possível (admitindo que vendem todos os arranjos).

(1ª fase - 2006)

7. Para estudar a Lei do Arrefecimento de um Corpo, a Joana aqueceu uma pequena quantidade de água. Em seguida, deixou-a a arrefecer, medindo a temperatura em vários instantes, a partir de um certo instante inicial.
De acordo com a referida lei, em cada instante, a taxa de variação da temperatura é directamente proporcional à diferença entre a temperatura da água, nesse instante, e a temperatura ambiente, que se considera constante.
Tem-se, portanto, que

$$T'(t) = k\left[T(t) - A\right]$$

em que:

- $T(t)$ designa a temperatura da água, no instante t;
- $T'(t)$ designa a taxa de variação da temperatura, nesse mesmo instante;
- A designa a temperatura ambiente;
- k é a constante de proporcionalidade.

Admita que, durante a experiência, o tempo foi medido em minutos e a temperatura em graus Celsius.
Na tabela seguinte, estão valores da temperatura da água, registados de 0,5 em 0,5 minutos, com início no instante $t = 2$.

t	2	2,5	3	3,5
$T(t)$	85,0	83,8	82,6	81,5

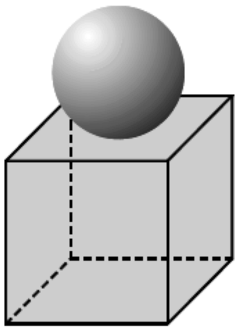
Tendo em conta os dados desta tabela e sabendo que a temperatura ambiente, no local da experiência, era de 25 graus Celsius, estime o valor de k.
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

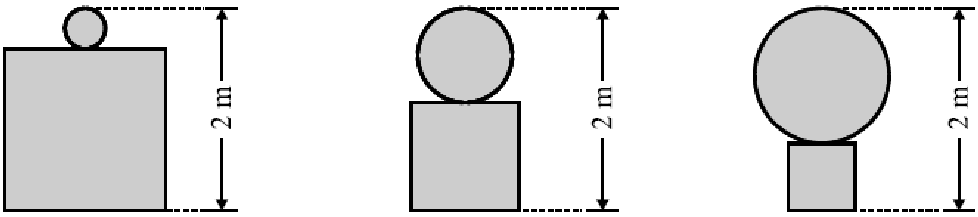
- Determine a taxa de variação média da temperatura da água, nos intervalos $[2;3,5]$, $[2;3]$ e $[2;2,5]$.
- Tendo em conta os valores obtidos, estime a taxa de variação instantânea da temperatura da água, no instante $t=2$.
- Tendo em conta a fórmula dada acima, estime o valor de k.

(2ª fase - 2006)

8. Na figura, está representado um projecto de uma escultura em cimento para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo.



Pretende-se que a escultura tenha uma altura total de 2 metros.
Apresentam-se, a seguir, as vistas de frente de três possíveis concretizações desse projecto.



8.1. Designemos por x o raio da esfera (em metros).

8.1.1. Indique, na forma de intervalo de números reais, o conjunto dos valores que a variável x pode assumir.

8.1.2. Mostre que o volume total, V, em metros cúbicos, da escultura é dado, em função de x, por

$$V(x)=\frac{4\pi-24}{3}x^3+24x^2-24x+8$$

8.1.3. Determine o raio da esfera e a aresta do cubo de modo que o volume total da escultura seja mínimo. Apresente os resultados em metros, arredondados às centésimas.

8.2. Admita agora que o raio da esfera é metade da aresta do cubo.
Pretende-se pintar toda a superfície da escultura, excepto, naturalmente, a face do cubo que está assente no chão.
Cada litro da tinta que vai ser utilizada permite pintar uma superfície de $2,5\,m^2$.
Admitindo que esta tinta só é vendida em latas de 1 litro, quantas latas será necessário comprar?

(2ª fase - 2006)