Aula 13: Permutações de multiconjuntos
Teorema multinomial

oazenhas

março 19, 2015

Coeficiente multinomial

- **Definição:** Seja $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros não negativos.
  $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ é o número de maneiras de partir o conjunto $[n]$ numa lista ordenada de k subconjuntos A_1, $A_2, \ldots, A_k$ (partição ordenada) com cardinalidades a_1,a_2, $\ldots$, a_k, respectivamente, onde $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.
  Este número é chamado coeficiente multinomial.

Exemplo. No caso $k = 2$, temos o coeficiente binomial. O número de maneiras de seleccionar um subconjunto com t elementos em $[n]$ é igual ao número de partições ordenadas de $[n]$ em dois blocos de tamanhos t e $n - t$ respectivamente

$$\binom{n}{n-t,\ t} = \binom{n}{t,\ n-t} = \binom{n}{t} = \binom{n}{n-t}$$

As partições ordenadas de $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$, com ambos os blocos de tamanho dois: $(\{1, 2\},\ \{3, 4\})$,$(\{1, 3\},\ \{2, 4\})$, $\{1, 4\}, \{2, 3\})$, $(\{2, 3\},\ \{1, 4\})$, $(\{2, 4\},\ \{1, 3\})$, $(\{3, 4\}, \{1, 2\})$

O seu número é igual ao número de subconjuntos de dois elementos que podemos formar em [4]: $\binom{4}{2,2} = \binom{4}{2} = 6$.

Coeficiente multinomial

Proposição. Seja $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são inteiros não negativos. Então

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!}.$$

Prova. Vamos determinar o número de maneiras de partir $[n]$ numa lista ordenada de k conjuntos de cardinalidades $a_1, \ldots, a_k$. Podemos começar por escolher a_1 elementos de entre os elemento de $[n]$. Existem $\binom{n}{a_1}$ possibilidades. A seguir escolhemos a_2 elementos dos restantes $n - a_1$ elementos. Existem $\binom{n-a_1}{a_2}$ possibilidades, etc. Pelo princípio do produto generalizado obtém-se

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} =$$

$$= \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\binom{n-a_1-a_2}{a_3}\cdots\binom{n-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!},$$

possibilidades de partir $[n]$ numa lista de k subconjuntos de cardinalidades a_1,a_2, $\ldots, a_k$ respectivamente.

Simetrias do coeficiente multinomial

Se $b_1, b_2, \ldots, b_k$ é uma reordenção de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, então

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n}{b_1, b_2, \ldots, b_k}.$$

Prova algébrica. Note-se que $a_1! \cdots a_k! = b_1! \cdots b_k!$ e então $\frac{n!}{a_1! \cdots a_k!} = \frac{n!}{b_1! \cdots b_k!}$.

Prova combinatória. 1) Recorde o exercício 63: $\binom{n}{k}\binom{n-k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k}$.

2) Seja $1 \leq i \leq n$. Consideremos o conjunto L de todas as listas ordenadas de k subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$ de cardinalidades $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1} \ldots, a_k$, respectivamente, e L' o conjunto de todas as listas ordenadas de k subconjuntos $B_1, \ldots, B_k$ de cardinalidades $a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_k$, tais que $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ e $[n] = \bigcup_{r=1}^{k} A_r = \bigcup_{r=1}^{k} B_r$. Então

$$|L| = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k} \text{ e } \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_k} = |L'|$$

Defina-se a bijecção $f : L \to L'$, (verifique)

$$(A_1, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_k) \to (A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_i, A_{i+2}, \ldots, A_k)$$

Observe que toda a reordenação pode ser obtida por trocas de posições consecutivas.

- Dispomos das letras $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$. Vamos calcular o número de palavras de comprimento dez que podemos formar com estas (e apenas estas) letras.
- Seja A o número dessas palavras que podemos formar.

  Consideremos uma dessas A maneiras de formar uma palavra com essas letras e vamos colocar umas etiquetas, digamos de 1 a 4, para as quatro letras a, 1 a 3 para as letras b, 1 a 2 para as letras c, 1 para a letra d.

  Agora temos dez letras diferentes na palavra, e, portanto, temos 10! palavras de comprimento dez.

  Quantas destas palavras diferem apenas por causa das etiquetas?

  Às letras a podemos dar etiquetas de 4! maneiras. Nas letras b podem ser colocadas etiquetas em 3! maneiras, nas letras c em 2! maneiras.

  No total as dez letras podem ser etiquetadas em 4!3!2! diferentes maneiras para cada uma das A palavras construídas.

  Portanto $10! = A.4!3!2!$. Ouseja, $A = \frac{10!}{4!3!2!}$

Permutações com repetição e combinações simples

- Outra maneira de resolver o problema anterior. Cada uma das palavras de comprimento dez pode ser obtida pela seguinte sequência de procedimentos:
  - Escolher quatro posições para as letras a's de entre as dez. Há $\binom{10}{4}$ possibilidades.
  - Escolher três posições para as letras b's de entre as $10 - 4 = 6$ restantes. Há $\binom{6}{3}$ possibilidades.
  - Escolher duas posições para as letras c's de entre as $10 - 4 - 3 = 3$ restantes. Há $\binom{3}{2}$ possibilidades.
  - Colocar a letra d na única posição que resta. Há $\binom{1}{1}$ possibilidade.
  - Pelo princípio do produto generalizado podemos formar no total $\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$ palavras de comprimento dez com as letras $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = \binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$$

Recorde que o coeficiente binomial $\binom{n}{t}$ é igual ao número de palavras de comprimento n no alfabeto $\{x, y\}$ com t letras x e $n-t$ letras y. Generalizamos agora ao caso de um alfabeto com mais de duas letras.

Proposição Sejam n, k e $a_1, a_2, \cdots, a_k$ inteiros não negativos satisfazendo $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$. Suponhamos que temos a_i objectos do tipo i, para todo o $i = 1, \ldots, k$. Então o número de maneiras de ordenar estes objectos é

$$\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}.$$

(O número de palavras de comprimento n que podemos formar com exactamente a_1 letras x_1, a_2 letras x_2, ..., a_k letras x_k .)

Prova: Codifiquemos os tipos $1, \ldots, k$ pelas letras $x_1, \ldots, x_k$ respectivamente. Cada ordenação dos n objectos tendo a_i objectos do tipo i para $i = 1, \ldots, k$, corresponde a uma palavra de comprimento n no alfabeto $x_1, \ldots x_k$ com a_i letras x_i, para $i = 1, \ldots, k$.

- Observações: Se $k = 2$ e $a_1 + a_2 = n$, então
$$\frac{n!}{a_1! a_2!} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!} = \binom{n}{a_1} = \binom{n}{a_2}.$$
- Para todo o $n \geq k \geq 0$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Se $a_1 = \cdots = a_k = 1$, $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k} = \frac{n!}{1!1!\cdots 1!} = n!$

Teorema multinomial

Teorema multinomial. *Para todos os inteiros positivos n e k, tem-se*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_k} \binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k},$$

onde a soma é tomada sobre todos os k-uplos de inteiros não negativos $a_1, a_2, \cdots, a_k$ tais que $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

Prova. Temos n factores

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_k).$$

Na expansão deste produto, cada um dos n factores contribui com uma letra no alfabeto $\{x_1, \ldots, x_k\}$. A lista formada pela contribuição de cada factor é uma palavra de comprimento n no alfabeto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ onde cada x_i aparece $a_i \geq 0$ vezes, precisamente o número de factores que contribuem com x_i, $i = 1, \ldots, k$.
O coeficiente do monómio $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}$ é o número $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k}$ que é precisamente o número de palavras de comprimento n no alfabeto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ em que x_i aparece a_i vezes, $i = 1, \ldots, k$.

- Quantos monómios distintos $x_1^{a_1}\cdots x_k^{a_k}$, $a_1+\cdots+a_k=n$, aparecem na expansão de
  $(x_1+x_2+\cdots+x_k)(x_1+x_2+\cdots+x_k)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_k)$?

  É igual ao número de composições fracas de n de comprimento k, $\binom{n+k-1}{k-1}$

Exemplo.Todas as palavras de comprimento três no alfabeto $\{x, y, z\}$, $xxx, xxy, xyx, yxx, xxz, xzx, zxx, xyy, yxy, yyx,\ xzz,\ zxz,\ zzx,\ xyz,\ xzy,$ $yxz,\ yzx,\ zyx,\ zxy,\ yyz, yzy,\ zyy,\ yzz, zyz,\ zzy,\ yyy,\ zzz$
O número total é igual 3^3.

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2z+3y^2x+3z^2x+3z^2y$$

$$+6xyz$$

Proposição Numa caixa k dimensional de dimensões $a_1 \times \cdots \times a_k$, o número de caminhos mais curtos em $\mathbb{Z}^k$ da origem para o ponto de coordenadas $(a_1, \ldots, a_k)$ é igual a $\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k}$.

Prova Sendo a caixa k dimensional os passos unitários são definidos pelos vectores unitários da base canónica e_i, $i = 1, \ldots, k$. Associemos a cada direção e_i a letra i. Então existe uma bijecção entre o conjunto das palavras comprimentso $a_1 + \cdots + a_k$, com a_i letras i, para $i = 1, \ldots, k$, e o conjunto dos caminhos mais curtos da origem para o ponto $(a_1, \ldots, a_k)$.