Aula 6: Função geradora de $2^{[n]}$ Binómio de Newton Identidades binomiais

oazenhas

2015

Soma na coluna k do rectângulo de Pascal

- **Proposição**. *A soma da coluna k do rectângulo de Pascal até à linha n é igual ao elemento situado na coluna $k+1$ e linha $n+1$.* Para todo o $n \geq k \geq 0$, temos

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

• **Prova**: (Recorde o exercício 51.) Classifiquemos os subconjuntos com $k+1$ elementos de $X = \{1, \ldots, n, n+1\}$ com respeito ao maior elemento i em cada um desses subconjuntos. Ou seja, para para cada $i = k+1, \ldots, n+1$ formemos a classe dos subconjuntos de X cujo maior elemento é i:

$S_{k+1} = \{A \subseteq X : |A| = k+1$ e cujo maior elemento é $k+1\}$

$$S_{k+1} = \{A = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{k+1\} : \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq [k]\}$$
$$= \{\{1, \ldots, k, k+1\}\}$$
$$|S_{k+1}| = \binom{k}{k}$$

Soma na coluna k do rectângulo de Pascal

- $$S_{k+2} = \{A \subseteq X : A = B \cup \{k+2\}, \quad B \subseteq \{1, \dots, k+1\}, \quad |B| = k\}$$
  $$|S_{k+2}| = \binom{k+1}{k}$$
- $$S_{k+3} = \{A \subseteq X : A = B \cup \{k+3\}, \quad B \subseteq \{1, \dots, k+2\}, \quad |B| = k\}$$
  $$|S_{k+3}| = \binom{k+2}{k}$$

Soma na coluna k do rectângulo de Pascal

- $$S_n = \{A \subseteq X : A = B \cup \{n\}, \quad B \subseteq \{1, \ldots, n-1\}, \quad |B| = k\}$$
  $$|S_n| = \binom{n-1}{k}$$

- $$S_{n+1} = \{A \subseteq X : A = B \cup \{n+1\}, \quad B \subseteq \{1, \ldots, n\}, \quad |B| = k\}$$
  $$|S_{n+1}| = \binom{n}{k}$$

- $$\sum_{i=k+1}^{n+1} |S_i| = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aplicação

- **Corolário.** Se $n \geq k \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

• **Prova**: Vamos usar a regra da soma e de contar de duas maneiras para provar esta igualdade. A linha i do rectângulo de Pascal tem soma 2^i, para $i = 0, 1, 2, \ldots$ A soma (das entradas) de todas as linhas do rectângulo de Pascal até à linha n, é, por um lado, igual a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$, e, por outro lado, é igual à soma de todas as colunas do rectângulo de Pascal, cada uma delas, até à linha n.

A soma da coluna k até à linha n é igual à entrada na linha $n+1$ e coluna $k+1$, para $k = 0, 1, \ldots$. Portanto, a soma de todas as colunas até à linha n é igual à soma das entradas na linha $n+1$ menos a primeira entrada. Ou seja,

$$2^{n+1} - 1.$$

Combinações simples

- Quantas
- maneiras existem de seleccionar r objectos distinguíveis de n objectos distinguíveis?
- maneiras existem de seleccionar r pessoas de n pessoas?
- palavras de comprimento n no alfabeto $\{x, y\}$ existem com r x's e $(n-r)$ y's, $n \geq r$?
- sequências binárias de comprimento n existem com r 1's e $(n-r)$ 0's?

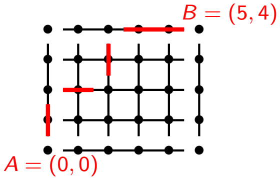
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

O número destas sequências binárias de comprimento n é igual ao número de escolhas de r posições (distinguíveis) para os r dígitos 1 (equivalentemente $n-r$ posições para os $n-r$ dígitos 0) de entre as n (distinguíveis) posições.

Caminhos numa grelha

- Consideremos em $\mathbb{Z}^2$ (os pontos de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas inteiras) os pontos $A = (0,0)$ e $B = (m,n)$, m, $n \geq 0$.Seja $L(m,n)$ o número dos caminhos mais curtos de A para B, isto é, todos os caminhos que começam em A e terminam em B andando apenas com passos unitários para Este, passos $(1,0)$, e para Norte, passos $(0,1)$.

$$m = 5, \quad n = 4$$



passo $(0,1)$, segmento vertical $\longleftrightarrow$ 0,
passo $(1,0)$, segmento horizontal $\longleftrightarrow$ 1

caminho de A para B $\quad\longleftrightarrow$ 001100111

- *Existe uma bijecção entre o conjunto dos caminhos de $A = (0, 0)$ para $B = (m, n)$ caminhando com passos unitários apenas no sentido Este (E) ou Norte (N), e o conjunto das sequências binárias com m uns e n zeros.*

  Prova: Consideremos a função entre o conjunto $\mathcal{C}$ de todos esses caminhos de A para B e o conjunto $\mathcal{W}$ de todas as palavras binárias de comprimento $m + n$ com m uns e n zeros tal que a cada caminho de $\mathcal{C}$ faz corresponder a seguinte palavra binária: um passo para Este é registado como 1, e um passo para Norte como zero, pela ordem que ocorrem. Todo o caminho de A para B em $\mathcal{C}$ consiste de $m + n$ passos, andando n passos para Norte e m passos para Este. Portanto, a cada caminho em $\mathcal{C}$ corresponde uma palavra binária de comprimento $m + n$ com m 1's e n 0's.

  A função é injectiva. Se dois caminhos são distintos isso significa que a sequência de passos para Norte e Este não é a mesma e as palavras binárias correspondentes são distintas.

  A função é sobrejectiva. Dada a palavra w em $\mathcal{W}$, seja o caminho com início em A tal que o passo $j = 1, \ldots, m + n$, se faz para Norte se a letra na posição j de w é zero e para Este se a letra é 1. Temos então uma bijeção.

- $L(m,n) = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.
- **Prova**: Consequência da bijecão anterior, $|\mathcal{C}| = |\mathcal{W}|$ e $|\mathcal{W}| = \binom{m+n}{n})| = \binom{m+n}{m}$.

Função geradora de $2^{\{1,2\}}$

- Notação: dado o inteiro positivo $n \geq 1$ escrevemos $[n] := \{1, \ldots, n\}$.
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$.
- $2^{[1]} = \{\emptyset, \{1\}\}$. Consideremos a variável x_1 e o polinómio $1 + x_1$.
- Consideremos todos os subconjuntos de $[2] := \{1, 2\}$.
  $2^{[2]} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
  Sejam x_1, x_2 duas variáveis independentes,

  $$(1 + x_1)(1 + x_2) = (1 + x_1) + (1 + x_1)x_2 = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2$$

  $$\prod_{i \in \emptyset} x_i = 1 \quad \prod_{i \in \{j\}} x_i = x_j, \; j = 1, 2, \quad \prod_{i \in \{1,2\}} x_i = x_1x_2$$

- $$(1 + x_1)(1 + x_2) = \prod_{i \in \emptyset} x_i + \prod_{i \in \{1\}} x_i + \prod_{i \in \{2\}} x_i + \prod_{i \in \{1,2\}} x_i = \sum_{A \subseteq [2]} \prod_{i \in A} x_i$$

Função geradora de $2^{\{1,2,3\}}$

- $2^{[3]} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
-

$$
\begin{aligned}
(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) &= (1+x_1)(1+x_2) + (1+x_1)(1+x_2)x_3 \\
&= 1 + x_1 + x_2 + x_3 \\
&\quad +x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\
&\quad +x_1x_2x_3 \\
&= \sum_{A\subseteq[3]} \prod_{i\in A} x_i
\end{aligned}
$$