

Aula 8: Identidades binomiais/Mais exemplos de contar de duas maneiras

oazenas

Março 3, 2015

Mais exemplos de contar de duas maneiras

Proposição.

$$k \binom{n}{k} = (n - k + 1) \binom{n}{k - 1} = n \binom{n - 1}{k - 1}.$$

Prova. É claro que estas igualdades podem ser verificadas algebricamente usando a fórmula para os coeficientes binomiais. Faremos uma demonstração rápida usando o princípio de contar de duas maneiras.

Quantas maneiras existem de escolher uma comissão de k pessoas de entre um conjunto de n pessoas, e designar um membro dessa comissão presidente?

Existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher a comissão e, para cada comissão, k escolhas para o presidente. Ou seja, $k \binom{n}{k}$. Em alternativa, podemos escolher o presidente primeiro de n maneiras, e depois os restantes $k - 1$ membros da comissão das restantes $n - 1$ pessoas de $\binom{n - 1}{k - 1}$ maneiras. Ou seja, $n \binom{n - 1}{k - 1}$. Outra alternativa, podemos escolher em primeiro lugar de $\binom{n}{k - 1}$ maneiras os $k - 1$ membros da comissão que não são designados para presidente e depois, para cada um desses $k - 1$ membros da comissão, o presidente das restantes $n - k + 1$ pessoas de $n - k + 1$ maneiras.

Mais exemplos de contar de duas maneiras

Exercício. Mostre que

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}, \quad n \geq m \geq k \geq 0.$$

(Quantos pares de conjuntos (A, B) , onde $B \subseteq A \subseteq [n]$ e $|B| = k \leq |A| = m$, podemos escolher em $[n]$? Conte de duas maneiras.)