Aula 10 A-B: Partições de um conjunto Números de Stirling de segunda espécie

Março 9-10, 2015

Partições (não ordenadas) de conjuntos e números de Stirling

- Os nossos objectos combinatórios de estudo são agora *as partições (não ordenadas) dum conjunto em conjuntos não vazios,*
  $R = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ união disjunta de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ não vazios.
- $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem $2^4 - 1 = 15$ (exercício 46) partições em 2 conjuntos; $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tem $2^5 - 1 = 31$ partições em 2 conjuntos.

$$\begin{array}{lll}
1234|5 & 123|45 & 145|23 \\
1235|4 & 124|35 & 234|15 \\
1345|2 & 125|34 & 235|14 \\
1245|3 & 134|25 & 245|13 \\
2345|1 & 135|24 & 345|12
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
12345|6 & 1234|56 & 1246|35 & 145|456 \\
12346|5 & 1235|46 & 1346|25 & 234|356 \\
12356|4 & 1245|36 & 2346|15 & 235|256 \\
12456|3 & 1345|26 & 1256|34 & 234|156 \\
13456|2 & 2345|16 & 1356|24 & 125|346 \\
23456|1 & 1236|45 & 2356|14 & 135|246 \\
 & & 1456|23 & 235|146 \\
 & & 2456|13 & 145|236 \\
 & & 3456|12 & 245|136 \\
 & & & 345|126
\end{array}$$

$2^4 - 1 = 5 + \binom{5}{2}$; $2^5 - 1 = 6 + \binom{6}{2} + \binom{5}{2}$

Partições (não ordenadas) de conjuntos e números de Stirling

- **Definição** O número de Stirling $S_{r,n}$ (de segunda espécie) é o número de partições em n partes (não vazias) de um conjunto de r elementos.

$$S_{r,n} = 0,\ n > r \geq 0, \quad S_{r,1} = 1 = S_{r,r},\ r \geq 1$$

$$S_{r,2} = 2^{r-1} - 1$$

Por convenção, escrevemos $S_{0,0} := 1$. (Uma explicação: o número de maneiras de distribuir 0 bolas por 0 caixas é não fazer nada.)

• Número de Bell. O número de todas as partições (em partes não vazias) de um conjunto com r elementos é o número de Bell $Bell(r)$,

$$Bell(r) = \sum_{k=1}^{r} S_{r,k}$$

$$Bell(0) := 1$$

- **Proposição.** O número de funções sobrejectivas de R para N, $|\{f : R \to N, f \text{ sobrejectiva}\}| =$
$=$ número de partições ordenadas de R em n partes não vazias $= n! S_{r,n}$

Partições (não ordenadas) de conjuntos e números de Stirling

- Quantas funções sobrejectivas existem de $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ para $N = \{1, 2\}$?
$$2!S_{5,2} = 2!(2^4 - 1)$$
- $|R| = r$, $|N| = n$
$$S_{r,n} = \frac{1}{n!}|\{f : R \to N, f \text{ sobrejectiva}\}|$$
- *De quantas maneiras podemos colocar r bolas distintas em n caixas iguais sem caixas vazias?*
$$S_{r,n}$$
- *De quantas maneiras podemos colocar r bolas distintas em n caixas iguais?*
$$\sum_{k=1}^{n} S_{r,k} = S_{r,1} + S_{r,2} + \cdots + S_{r,n}.$$

Números de Stirling (segunda espécie): alguns valores

- R não vazio, $|R| = r$.
- $S_{r,1} = 1 = S_{r,r}$, $r \geq 1$
- $S_{r,2} = 2^{r-1} - 1$ (exercício 40), número de maneiras de partir um conjunto R de r elementos em duas partes (não vazias). Contar partições de R em dois blocos $\{A, R \setminus A\}$ com A não vazio e $A \neq R$.

$$S_{r,2} = 2^{r-1} - 1$$

- $S_{r,r-1} = \binom{r}{2}$.

  Uma partição de R em $r - 1$ blocos (não vazios) consiste exactamente de um bloco com 2 elementos de R e os restantes $r - 2$ blocos (não ordenados) com apenas um elemento cada, retirado de entre os $r - 2$ elementos que sobraram depois de ter feito a escolha do bloco de dois elementos o qual pode ser escolhido de $\binom{r}{2}$ maneiras.

Números de Stirling (segunda espécie): alguns valores

- $R = \{1, 2, 3, 4\}$

  $\binom{4}{2}$ partições de R em três partes

  $12|3|4$

  $13|2|4$

  $14|2|3$

  $23|1|4$

  $24|1|3$

  $34|1|2$

- Quantas funções sobrejectivas existem de um conjunto de r elementos para um conjunto de $r-1$ elementos?

$$(r-1)!\binom{r}{2}$$

Proposição.

$$S_{r,k} = S_{r-1,k-1} + kS_{r-1,k}, \ r \geq 1.$$

Prova. O lado esquerdo da igualdade conta o número de maneiras de partir R em k partes. Agora vamos contar doutra maneira. Fixemos $x \in R$, onde $|R| = r$. Então x forma um bloco de tamanho 1 ou está num bloco de tamanho pelo menos dois.

No lado direito, a primeira parcela conta todas as partições de R em k partes sendo $\{x\}$ um bloco de tamanho 1, e a segunda parcela conta aquelas partições de R em k partes onde x aparece num bloco de tamanho ≥ 2.

Neste último caso, um tal bloco pode ser obtido acrescentando x a qualquer um dos k blocos de uma partição de $R \setminus \{x\}$ em k partes. O número de maneiras de partir $R \setminus \{x\}$ em k blocos é $S_{r-1,k}$. Portanto, para cada maneira de partir $R \setminus \{x\}$ em k blocos,

$$R \setminus \{x\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K$$

x é acrescentado a cada um dos k blocos, dando origem a k partições de R em k partes onde x aparece num bloco de tamanho ≥ 2

Números de Stirling (segunda espécie): uma relação de recorrência

- $R = (A_1 \cup \{x\}) \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K$
  $R = A_1 \cup (A_2 \cup \{x\}) \cup A_3 \cup \cdots \cup A_K$
  $\vdots$
  $R = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup (A_K \cup \{x\})$
- Ou seja, x aparece em $kS_{r-1,k}$ blocos de tamanho ≥ 2.

Números de Stirling (segunda espécie): uma relação de recorrência

- $k = r - 1$
- $$\begin{aligned} S_{r,r-1} &= S_{r-1,r-2} + (r-1)S_{r-1,r-1} \\ &= S_{r-2,r-3} + (r-2)S_{r-2,r-2} + (r-1) \\ &= \cdots = S_{3,2} + 3 \cdots + (r-2) + (r-1) \\ & S_{2,1} + 2 + \cdots + (r-2) + (r-1) \\ &= 1 + 2 + \cdots + (r-2) + (r-1) = r(r-1)/2 \\ &= \binom{r}{2} \end{aligned}$$

O número total de funções sobrejectivas de $f : [n] \to [m]$ é igual a $m! S_{n,m}$, onde $S_{n,m}$ é o número de partições (não ordenadas) do conjunto $[n]$ em m partes não vazias. Toda a função $f : [n] \to [m]$ pode ser considerada como uma função sobrejectiva $f : [n] \to Y$ onde $Y = f([n])$. Então

$$\begin{aligned} m^n &= |\{f : [n] \to [m]\}|, \text{ classificando as funções de acordo com a imagem } Y, \\ &= \sum_{Y \subseteq [m]} |\{f : [n] \to Y, \text{f sobrejectiva}\}| \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\substack{|Y|=k \\ Y \subseteq [m]}} |\{f : [n] \to Y, \text{f sobrejectiva}\}| \right) \end{aligned}$$

Note que $\displaystyle\sum_{\substack{|Y|=k \\ Y \subseteq [m]}} |\{f : [n] \to Y, \text{f sobrejectiva}\}| = \binom{m}{k} k! S_{n,k}$ (Quantas parcelas tem esta soma?)

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k! S_{n,k} = \sum_{k=0}^{m} S_{n,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)$$

Nota: Se $n < m$, $S_{n,k} = 0$ para $k > n$, e então
$\sum_{k=0}^{m} S_{n,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1) = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)$.
Como $m(m-1)(m-2)\cdots(m-m+1)(m-(m+1)+1)\cdots(m-k+1) = 0$ para $k \geq m+1$, se $n > m$, então
$\sum_{k=0}^{m} S_{n,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1) = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)$.

$$= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1).$$

Ou seja, $m^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1), n \geq 0.$
Em particular, para $n = 0$, vem $m^0 = S_{0,0} = 1$.

Observação. Recorde que, na teoria dos conjuntos, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto f de $A \times B$ tal que

- se $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in A \times B$, e
- tal elemento y é único.

De acordo com esta definição, se $A = \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ então existe exactamente uma função de A para B, $1 = |B|^0$. Se $A \neq \emptyset$ e $B = \emptyset$ então não existe nenhuma função de A para B, $0^{|A|} = 0$. Donde, $|\{f : [n] \to \emptyset\}| = 0$.

• *Se $p(x)$ e $q(x)$ são dois polinómios sobre $\mathbb{C}$ de grau $\leq n$ que coincidem em pelo menos $n+1$ pontos distintos então eles são iguais. Em particular, se $p(n) = q(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $p(x) = q(x)$.*

Da igualdade
$m^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1), n \geq 0, m \in \mathbb{N}$, resulta
então a identidade polinomial

$$x^j = \sum_{k=0}^{j} S_{j,k} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), \quad j \geq 0.$$

$$x^0 = S_{00}1 = 1,\ x^1 = S_{11}x = x,\ x^2 = x + S_{22}x(x-1) = x + x(x-1),$$

$$x^3 = x + (2^2-1)x(x-1) + x(x-1)(x-2),$$

$$x^4 = x + (2^3-1)x(x-1) + \binom{4}{2}x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Argumento polinomial

• Consideremos o espaço vectorial V complexo dos polinómios de grau $\leq n$, $V = \{a_k x^k + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : 0 \leq k \leq n, a_i \in \mathbb{C}\}$. Como $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base de V, então a igualdade polinomial acima permite-nos concluir que
$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \ldots, x(x-1)\cdots(x-n+1)\}$ é também uma base para V, pois

$$x^j = \sum_{k=0}^{j} S_{j,k} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Exemplo $n = 4$, $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ e
$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)\}$

$$x^4 = S_{4,0}1 + S_{4,1}x + S_{4,2}x(x-1) + S_{4,3}x(x-1)(x-2) + S_{4,4}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= 0.1 + (2^3 - 1)x(x-1) + \binom{4}{2}x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3).$$

- Para k inteiro não negativo, definimos o polinómio

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-(k-1))}{k!}.$$

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{1} = x, \quad \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}, \quad \binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$