Aula 15:Princípio da inclusão-exclusão Desencontros e Encontros

oazenhas

Abril 8 , 2015

Teorema (Princípio da inclusão exclusão.) Sejam X um conjunto e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma família de subconjuntos (não necessariamente disjuntos) de X. Então o número de elementos no universo X que não estão em nenhum dos suconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, é

$$\left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = |X| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=k}} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| .$$

Prova. Escrevamos por extenso a expressão acima

$$\begin{array}{rcc}
|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| & = & |X| \\
 & - & \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\
 & + & \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\
 & - & \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| \\
 & + & \\
 & \vdots & \\
 & +(-1)^k & \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\
 & \vdots & \\
 & +(-1)^n & |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rccl}
|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| & = & |X| & \binom{n}{0} \text{ parcelas} \\
 & - & \sum_{i=1}^{n} |A_i| & \binom{n}{1} \text{ parcelas} \\
 & + & \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| & \binom{n}{2} \text{ parcelas} \\
 & - & \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| & \binom{n}{3} \text{ parcelas} \\
 & + & & \\
 & \vdots & & \\
 & +(-1)^k & \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| & \binom{n}{k} \text{ parcelas} \\
 & \vdots & & \\
 & +(-1)^n & |A_1 \cap \cdots \cap A_n| & \binom{n}{n} \text{ parcelas.}
\end{array}
$$

Consideremos x um elemento arbitrário de X. Se x está em $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n}$, é contado, no lado esquerdo da expressão, exactamente uma vez, e zero vezes, caso contrário. Temos de mostrar que o mesmo acontece no lado direito. Suponhamos que x está exactamente em k $(0 \leq k \leq n)$ subconjuntos $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ (*não estando em nenhum outro* A_j). (Quando $k = 0$ significa que o elemento não está em nenhum deles.) O número de vezes que x é contado no segundo membro da expressão acima, linha a linha, é

1 vez no termo $|X|$;
depois k vezes, uma por cada $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$;
depois $\binom{k}{2}$ vezes, uma por cada $A_{i_1} \cap A_{i_2}, A_{i_1} \cap A_{i_3}, \ldots, A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}$;
depois $\binom{k}{3}$ vezes, uma por cada $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}, A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_4}, \ldots,$ $A_{i_{k-1}} \cap A_{i_{k-2}} \cap A_{i_k}$, e assim sucessivamente.
No total x é contado exactamente

$$1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = \begin{cases} 0, & \text{se } k > 0 \\ 1, & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

vezes. O que significa que a expressão acima está correcta.

Princípio da inclusão-exclusão

O número de elementos em um ou mais dos conjuntos A_1, $A_2, \ldots, A_n$, é

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \qquad \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = |X| - \left| X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

Ou seja,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S| = k}} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Princípio da inclusão-exclusão

- Dado um conjunto finito de objectos, cada um dos quais pode ter ou não a propriedade $1, 2, \ldots, n$, seja $N(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ o número de objectos que têm pelo menos as propriedades $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Então o número de objectos que têm pelo menos uma das propriedades 1,2,..., n, é

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} N(i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(i_1, i_2) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} N(i_1, i_2, i_3) + \cdots + \\
+ \quad & (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} N(i_1, \ldots, i_k) + \cdots + (-1)^{n-1} N(1, 2, \ldots, n) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} N(i_1, \ldots, i_k)
\end{aligned}
$$

Desencontros

- **Definição** Numa permutação dos primeiros n inteiros, um número que ocupe a sua posição natural é dito*um ponto fixo* da permutação.

142536   1 e 6 são pontos os pontos fixos

- **Definição** Uma permutação dos primeiros n inteiros sem que nenhum ocupe a sua posição natural é chamada um *desencontro de comprimento n* ou uma *permutação de* $\{1, \dots, n\}$ *livre de pontos fixos*. O número de desencontros de $\{1, \dots, n\}$ é denotado por D_n.
- Em geral, um *desencontro* de uma lista de n elementos é uma permutação desses elementos tal que nenhum elemento aparece na sua posição original.

241635

Desencontros

- **Problema** *Determinar D_n, o número de desencontros de* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

  Resolução.
  " propriedade i"$=$ *permutação de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *onde o elemento i está na sua posição natural,* $i = 1, \ldots, n$

  $N(i_1, i_2, \ldots, i_k) =$ número de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com pelo menos os elementos $i_1, i_2, \ldots, i_k$ na sua posição natural

  $$= (n-k)!$$

  Número total de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com pelo menos k elementos fixos (k elementos na sua posição natural)

  $$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} N(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \binom{n}{k}(n-k)!$$

  Queremos contar as permutações que não verificam nenhuma das *propriedades* $1, 2, \ldots, n$

Desencontros

- $$D_n = n! - (N(1) + \cdots + N(n)) + (N(1,2) + N(1,3) + \cdots + N(n-1,n)) -$$
  $$-(N(1,2,3) + \cdots + N(n-2,n-1,n)) + \cdots + (-1)^n N(1,\ldots,n)$$
  $$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$
  $$= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$
  $$= n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \approxeq n!/e.$$

  Recorde da análise que

  $$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!, \quad e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{D_n}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$$

- **Exemplo** De quantas maneiras poderão ser metidas n cartas em n envelopes sem que ninguém receba a carta que lhe é dirigida?

  $D_1 = 0,\ D_2 = 1,\ D_3 = 2,\ D_4 = 9$

Encontros

- **Definição** As permutações dos inteiros $\{1, \ldots, n\}$ onde alguns se encontram nas suas posições naturais são chamadas *encontros.* *$E(r, n)$ denota o número de permutações dos inteiros* $\{1, \ldots, n\}$ *onde precisamente r entre os n números se econtram nas suas posições naturais.*

  Em particular, $E(n, n) = 1$.

- Para cada escolha de r pontos fixos numa permutação de $\{1, \ldots, n\}$, existem D_{n-r} desencontros. No total existem $\binom{n}{r}$ escolhas de r pontos fixos numa permutação de $\{1, \ldots, n\}$. Portanto,

$$E(r, n) = \binom{n}{r} D_{n-r}.$$

  (Definimos $D_0 := 1$.) Em particular, $E(0, n) = D_n$.

- Classificando as $n!$ permutações de $\{1, \ldots, n\}$ relativamente ao número de elementos fixos, isto é, o número de inteiros que não sairam da sua posição natural, tem-se $\sum_{r=0}^{n} E(r, n) = n!$

Encontros

- De quantas maneiras poderão ser enviadas n cartas de tal modo que que r cheguem aos seus destinatários e $n-r$ cheguem trocadas?

$$E(r,n) = \binom{n}{r} D_{n-r}$$

$E(0,n) = D_n$, $E(n-1,n) = D_1 = 0$

- Conte todas as permutações de $\{1,2,\ldots,n\}$ em que o 1 não está na primeira posição.

  Contemos todas as permutações em que 1 (pelo menos) está na primeira posição: $(n-1)!$

$$n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$$