Aula 17: Partições de um número
Diagramas de Ferrers

oazenhas

Abril 13, 2014

- Sejam r e n inteiros positivos. Então $p(r,n) = 0$ se $n > r$, $p(r,r) = p(r,1) = 1$ e

$$p(r,n) = \sum_{k=1}^{n} p(r-n,k), \quad r > n > 1.$$

Sabemos que $p(r,n)$ é o número de maneiras de distribuir r bolas iguais por n caixas iguais sem deixar nenhuma vazia. Como $r > n$ e não podem ficar caixas vazias, distribuimos n bolas, uma por cada uma das n caixas, e sobram $r-n$ bolas para serem distribuídas ou por 1 caixa de $p(r-n,1) = 1$ maneiras, ou por 2 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r-n,2)$ maneiras, ou por 3 caixas não deixando caixas vazias, de $p(r-n,3)$ maneiras, ..., ou por n caixas sem deixar caixas vazias, de $p(r-n,n)$ maneiras.

$$p(7,4) = p(3,1) + p(3,2) + p(3,3) = 1 + p(1,1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

- **Definição** $p(r, \leq n)$ denota o número de partições de r com no máximo n partes. Ou seja,

$$p(r, \leq n) = p(r,1) + p(r,2) + \cdots + p(r,n).$$

Em particular, $p(r) = p(r, \leq r)$.

Exemplo $p(5) = 7$, (5) $(4,1)$, $(3,1,1)$, $(3,2)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$

$p(5) = p(5,5) + p(5,4) + p(5,3) + p(5,2) + p(5,1)$

$p(5,1) = 1,\ p(5,2) = 2,\ p(5,3) = 2,\ p(5,4) = 1,\ p(5,5) = 1$

$p(5, \leq 3) = p(5,1) + p(5,2 + p(5,3) = 1 + 2 + 2 = 5$

- Da relação de recorrência anterior, temos

$$p(r,n) = p(r-n,n) + p(r-n,n-1) + \cdots + p(r-n,1) = p(r-n, \leq n).$$

Exemplo

$p(6,3) = p(6-3, \leq 3) = p(3, \leq 3) = p(3,3) + p(3,2) + p(3,1) = p(3) = 3$

$p(6,4) = p(6-4, \leq 4) = p(2, \leq 4) = p(2,2) + p(2,1) = 1 + 1 = 2$

- Sejam n e r inteiros positivos. Então $p(r, n) = 0$ se $n > r$, $p(r, r) = p(r, 1) = 1$ e

$$p(r, n) = p(r-1, n-1) + p(r-n, n), \quad \text{se } r > n > 1.$$

• Na aula anterior usámos um argumento combinatório para provar esta relação de recorrência. Vamos ver agora que ela também pode ser obtida da relação de recorrência anterior.

Prova 2 Usando a relação de recorrência anterior:

$$p(r, n) = p(r-n, n)+p(r-n, n-1)+\cdots+p(r-n, 1) = p(r-n, n)+p(r-n, \leq n-1).$$

Por outro lado,

$$p(r-1, n-1) = p(r-1-(n-1), \leq n-1) = p(r-n, \leq n-1).$$

Portanto,

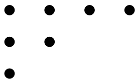
$$p(r, n) = p(r-1, n-1) + p(r-n, n).$$

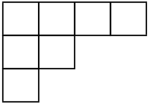
- **Exemplo**

$$\begin{aligned} p(6,3) &= p(5,2) + p(3,3) \\ &= p(4,1) + p(3,2) + p(3,3) = p(4,1) + p(2,1) + p(1,2) + p(3,3) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

- O diagrama de Ferrers (diagrama de Young) de uma partição $p = (a_1, \ldots, a_k)$ de n é um conjunto de n pontos (ou caixas quadradas) alinhadas à esquerda, de tal modo que a linha 1, contando de cima para baixo, tem a_1 pontos (caixas), a linha 2 tem a_2 pontos (caixas), ..., a linha k tem a_k pontos (caixas).

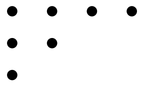
$p = (4, 2, 1)$

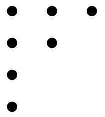




- Se reflectirmos o diagrama de Ferrers de uma partição p, com respeito à sua diagonal principal $y = -x$, obtemos a partição p' conjugada da partição p. O comprimento da coluna i do diagrama de Ferrers de p é igual ao comprimento da linha i do diagrama de Ferrers da conjugada de p. As partições $p = (4, 2, 1)$ e $p' = (3, 2, 1, 1)$ são conjugadas uma da outra. Se reflectirmos o diagrama de Ferrers de p' obtemos p, isto é, $(p')' = p$.

$p = (4, 2, 1)$





$p' = (3, 2, 1, 1)$

Diagrama de Ferrers

- Uma partição é dita auto-conjugada se é igual à sua conjugada. (O diagrama de Ferrers coincide com o que se obtém da reflexão segundo a diagonal principal.)

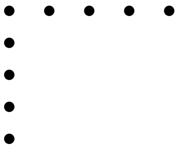
$$(4,3,2,1),\ (5,1,1,1,1),\ (4,2,1,1) \quad \text{são auto-conjugadas}$$

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & & \\ \bullet & & & & \\ \bullet & & & & \\ \bullet & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array}$$

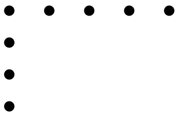
$$p = p'$$

Gancho. Dada um diagrama de Young, toda a caixa nesse diagrama determina um (único) gancho que consiste dessa caixa e das caixas à sua direita, na mesma linha (braço), e das caixas situadas abaixo, na mesma coluna (perna).

A partição $(5, 1, 1, 1, 1)$ é ela própria um gancho onde a perna e o braço têm o mesmo comprimento 4.



A partição $(5, 1, 1, 1)$ é também um gancho mas neste caso o perna tem comprimeno 3 enquanto o braço tem comprimento 4.



- **Proposição** O número de partições de r com k partes é igual ao número de partições de r com a parte maior igual a k.

  O número de partições de r com no máximo k partes é igual ao número de partições de r em partes de tamanho menor ou igual a k.

$$p(r, k) = \#\text{partições de } r \text{ com a parte maior igual a } k.$$

$$p(r, \leq k) = \#\text{partições de } r \text{ em partes de tamanho} \leq k.$$

- **Exemplo** $(4, 2, 1)$ é uma partição de 7 com 3 partes, e a sua conjugada $(3, 2, 1, 1)$ é uma partição de 7 com a parte maior igual a 3.

$$p = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \end{array} \qquad p' = \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$$

  Conjugando uma partição com parte maior igual a 3 obtemos uma partição com três partes.

- **Prova** Vamos provar que existe uma bijecção entre o conjunto das partições de r, com no máximo k partes, e o conjunto das partições com partes $\leq k$

  Se o número de partes da partição $p = (a_1, \ldots, a_m)$ é $m \leq k$, então a parte maior da partição conjugada p' é $m \leq k$. Portanto, as restantes partes de p' são $\leq k$.

Seja P_r o conjunto das partições de r. A função

$$f : P_r \to P_r, \quad f(p) = p',$$

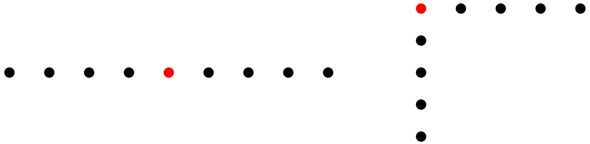
é uma bijecção. Note que $(p')' = p$ e $f \circ f = id$.
Em particular, f transforma o conjunto das partições de r com k partes no conjunto das partições de r com a parte maior igual a k; e o conjunto das partições de r com no máximo k partes, no conjunto das partições com partes $\leq k$.

Partições auto-conjugadas

Proposição O número de partições auto-conjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.

Prova. Consideremos uma partição de n em partes distintas ímpares. Observe-se que toda a parte ímpar $2q+1$ de uma partição de n pode ser dobrada no meio (pontos a vermelho) de modo a formar um gancho onde o braço e a perna têm o mesmo comprimento q.

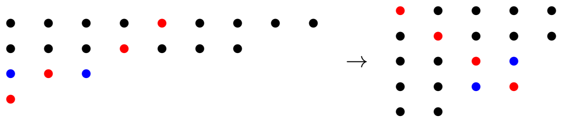
$2 \times 4 + 1$



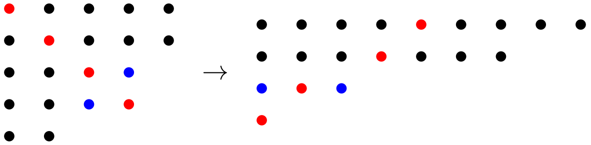
Como duas partes consecutivas são dois ímpares distintos, se a maior é $2q+1$, a outra é quando muito $2q-1 = 2(q-1)+1$. Então o comprimento dos braços (pernas) dos respectivos ganchos é q e $q-1$ (quando muito), isto é, decresce estritamente.

Partições auto-conjugadas

Iniciando este processo com a primeira linha da partição, e encaixando sucessivamente os ganchos, obtemos uma partição autoconjugada:



Partições auto-conjugadas



Para verificarmos que temos uma bijecção basta mostrar que este procedimento pode ser invertido. Começando com uma partição auto conjugada observemos que o diagrama de Ferrers é simétrico relativamente ao eixo $y = -x$. Isto é toda a caixa ao longo deste eixo determina um gancho com braço e perna de igual tamanho. Rectificando todos os ganchos com o cotovelo no eixo $y = -x$, obtemos uma partição com todas as partes distintas e de comprimento ímpar.

Função geradora de todas as partições com partes $\leq k$

- $$(1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{k+k}+x^{k+k+k}+\cdots)$$

  O número de maneiras de obter x^r é igual ao número de maneiras de escrever $r=(1+\cdots+1)+(2+\cdots+2)+\cdots+(k+\cdots+k)$, ou seja, de escrever r como uma soma de partes todas $\leq k$. O coeficiente de x^r é igual a $p(r,\leq k)$. Então

  $$\begin{aligned} & (1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{k+k}+\cdots) = \\ = & \sum_{r\geq 0} p(r,\leq k)x^r. \end{aligned}$$

  Convencionamos $p(0):=1$.

- $k=2$,

  $$\begin{aligned} & (1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots) \\ = & 1+p(1,\leq 2)x+p(2,\leq 2)x^2+p(3,\leq 2)x^3+p(4,\leq 2)x^4+p(5,\leq 2)x^5+\cdots \end{aligned}$$

  Todas as partições de 5 apenas com partes 1 e 2

  x^1x^{2+2}, $x^{1+1+1}x^2$, $x^{1+1+1+1+1}$

  $p(5,\leq 2)=3$