Aula 19: Partições de um conjunto e partições de um número

oazenhas

abril 16, 2015

Partições ordenadas de conjuntos

- *Quantas funções existem de R para N tais que y_i é a imagen de a_i elementos de R, para $i = 1, \ldots, n$?*

$$\binom{r}{a_1, a_2, \ldots, a_n} =$$

  $=$ número de partições ordenadas do conjunto R em n conjuntos, $A_1, \ldots, A_n$ onde $|A_i| = a_i$, para $i = 1, \ldots, n =$ número total de maneiras de distribuir r bolas distintas por n caixas distintas, colocando a_i bolas na caixa i, para $i = 1, \ldots, n$.

- Qual é o número total de funcões de R par N?

$$\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0} \\ a_1+\ldots+a_n=r \\ \text{composição fraca de } r \\ \text{em } n \text{ partes}}} \binom{r}{a_1, a_2, \ldots, a_n} = n^r$$

  Número total de partições ordenadas do conjunto R em n conjuntos, podendo haver blocos iguais ao conjunto vazio $=$ Número total de maneiras de distribuir r bolas distintas por n caixas distintas, podendo haver caixas vazias.

Partições ordenadas de conjuntos

- Se $f : R \to N$ for sobrejectiva então os blocos da partição são não vazios, e $A_1, \ldots, A_n$ formam uma partição *ordenada* de conjuntos não vazios de R.
- *Quantas funções sobrejectivas existem de R para N ?*

  É igual ao número de partições ordenadas de R em n conjuntos não vazios $=$ número de maneiras de colocar r bolas distintas em n caixas distintas sem deixar caixas vazias

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r$$

$$= \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_n) \\ \text{composição de } r \\ \text{em } n \text{ partes}}} \binom{r}{a_1, a_2, \ldots, a_n}$$

- Quantas palavras de comprimento 5, com exactamente três letras iguais a 2 e duas letras iguais a 1, pode formar?

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

- Quantas composições de 8 em cinco partes pode formar, sendo três delas iguais a 2 e duas iguais a 1?

  É igual ao número de maneiras de escollher três lugares para o 2 de entre cinco, equivalentemente, igual ao número de maneiras de escollher dois lugares para o 1 de entre cinco.

$$\frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

$$22211; 22112; 21122; 11222; 22121; 21221; 12221; 21212; 12212; 12122$$

- Quantas partições ordenadas existem do conjunto [8] em cinco partes de tal modo que três blocos têm tamanho 2 e dois têm tamanho 1?

$$\frac{5!}{3!2!}\binom{8}{2, 2, 2, 1, 1}$$

- Quantas partições (não ordenadas) existem do conjunto [8] em cinco partes de tal modo que três blocos têm tamanho 2 e dois têm tamanho 1?

$$\binom{8}{2,2,2,1,1}?$$

$$\frac{\binom{8}{2,2,2,1,1}}{3!2!}?$$

Não distinguimos, por exemplo, as seguintes partições de [8]:

$$\{1,2\};\{3,4\};\{5,6\};\{7\};\{8\}$$

e

$$\{3,4\};\{5,6\};\{1,2\};\{8\};\{7\}.$$

Resposta:

$$\frac{\binom{8}{2,2,2,1,1}}{3!2!}.$$

Partições de números e partições de conjuntos

- **Definição** Seja $A_1, A_2, \ldots, A_k$ uma partição (não ordenada) do conjunto $[n]$ em k blocos com tamanhos $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Se $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é a reordenação por ordem decrescente dos tamanhos dos blocos $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Então $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é uma partição do número n em k partes e dizemos que a é o *tipo da partição* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ do conjunto $[n]$.
- **Exemplo** $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$ e $\{10\}$ e $\{1, 2, 10\}$, $\{5, 8\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 6\}$ e $\{7\}$ são duas partições distintas do conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$, ambas do tipo $(3, 2, 2, 2, 1)$.

Partições de números e partições de conjuntos

Teorema Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ uma partição do número n, em k partes, e seja m_i é a multiplicidade de i como uma parte de a. Então o número de partições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que são do tipo a, é igual a

$$\frac{\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k}}{\prod_{i \geq 1} m_i!}.$$

$$S_{8,5} = \sum_{\substack{(a_1 \ldots a_5) \\ \text{composição de 8} \\ \text{em 5 partes}}} \frac{\binom{8}{a_1, a_2, \ldots, a_5}}{5!} = \sum_{\substack{(a_1 \geq \ldots \geq a_5) \\ \text{partição de 8} \\ \text{em 5 partes}}} \frac{5!}{\prod_{i \geq 1} m_i!} \frac{\binom{8}{a_1, a_2, \ldots, a_5}}{5!}$$

$$= \sum_{\substack{(a_1 \geq \ldots \geq a_5) \\ \text{partição de 8} \\ \text{em 5 partes}}} \frac{\binom{8}{a_1, a_2, \ldots, a_5}}{\prod_{i \geq 1} m_i!}, \text{ onde } m_i \text{ é a multiplicidade de } i \text{ como parte de } (a_1, \ldots, a_5).$$

- Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ uma partição de n, e m_i a multiplicidade de $i \geq 1$ como uma parte de a. Por exemplo, $a = (3, 3, 1, 1)$ é uma partição de 8 e $m_1 = 2$, $m_2 = 0$, $m_3 = 2$ e $m_i = 0$, $i \geq 4$.
- Mostre que o número de composições distintas que obtém reordenando (permutando) de todas as maneiras possíveis as entradas de a é $\frac{k!}{\prod_{i \geq 1} m_i!}$. (Note que $0! = 1$.)
- Quantas composições distintas obtém reordenando (permutando) as entradas de $(3, 3, 1, 1)$? Escreva-os todas.

$$\binom{4}{2, 2} = \binom{4}{2}$$

Bast escolher os lugares para o 3 de entre quatro.
- De quantas maneiras pode distribuir n objectos distintos por k caixas distintas, pondo a_1 objectos na caixa 1, a_2 objectos na caixa 2, ..., e a_k objectos na caixa k?

$$\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k}$$

- De quantas maneiras pode distribuir n bolas distintas por k caixas iguais, sem deixar caixas vazias, de modo a que haja m_1 caixas com 1 bola, m_2 caixas com 2 bolas, ..., m_j caixas com j bolas, onde $m_1 + 2m_2 + \cdots + jm_j = n$ e $m_1 + \cdots + m_j = k$?
  Se $a = (a_1, \ldots, a_k)$ for a partição de n, onde m_i é a multiplicidade de i como uma parte de a, então é o número de partições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que são do tipo a,
  $$\frac{\binom{n}{a_1, a_2, \cdots, a_k}}{\prod_{i \geq 1} m_i!}.$$

- De quantas maneiras pode distribuir 4 bolas distintas por 2 caixas iguais, de modo a que haja 2 caixas com 2 bolas cada? 1 caixa com 1 bola, 1 caixa com 3 bolas? E se fizer a distribuição das 4 bolas distintas por 3 caixas iguais sem deixar caixas vazias?
  $$\binom{4}{2,2}/2! \quad \binom{4}{3,1} \quad S_{4,3} = \binom{4}{2,1,1}/2! = \binom{4}{2}$$
- Mostre que se $a = (2, 1, \ldots, 1)$ é uma partição de n então o número de partições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que são do tipo a é igual a $\binom{n}{2}$.
  $$S_{n,n-1} = \frac{\binom{n}{2,1,\ldots,1}}{(n-2)!} = \binom{n}{2}$$

- De quantas maneiras pode distribuir $9n$ objectos distintos por 9 caixas iguais, cada uma com n objectos?

$$\frac{\binom{9n}{\underbrace{n,\ldots,n}_{9}}}{9!}$$

- Use um modelo combinatório para mostrar que $\dfrac{(9n)!}{9! \times (n!)^9}$ é um número inteiro.