Aula1: O princípio das gaiolas dos pombos

oazenhas

2015

O princípio das gaiolas dos pombos: Forma simples

Teorema

Sejam n e k inteiros positivos tais que $n > k$. Suponhamos que temos de colocar n bolas idênticas em k caixas idênticas. Então existirá pelo menos uma caixa onde colocamos pelo menos duas bolas.

- **Demonstração.** Por redução ao absurdo. Suponhamos que todas as caixas têm menos de duas bolas.

  Então cada uma das k caixas ou tem 0 bolas ou 1 bola. Seja $m \geq 0$ o número de caixas com 0 bolas. Então existem $k - m$ caixas com exactamente 1 bola cada uma. No total temos $k - m \leq k < n$ bolas colocadas nas caixas. Contradição porque temos de colocar n bolas.

Aplicações

- Num grupo de 13 pessoas há pelo menos duas com aniversário no mesmo mês.

  12 caixas e 13 bolas

- Existem n casais. Das $2n$ pessoas quantas devem ser seleccionadas para garantir que um casal é seleccionado?

  n caixas e $n+1$ bolas

- Se marcarmos arbitrariamente 17 pontos num triângulo equilátero com lados de comprimento 4, então existem pelo menos dois pontos a uma distância máxima de 1.

  16 caixas e 17 bolas

- Dados três números inteiros, há dois com soma par.

  2 caixas e 3 bolas

Princípio da gaiola dos pombos na linguagem dos conjuntos

- *Seja S um conjunto finito tal que $|S| = n$, e*

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m,$$

onde $S_i \cap S_j = \emptyset$, para $i \neq j$. Se $n > m$ então existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $|S_i| > 1$.

Exemplo: Dados três números inteiros, há dois com soma par.

$$S = \{a, b, c\}$$

$$S_1 = \{x \in S : x \; par\}$$

$$S_2 = \{x \in S : x \;\; \text{ímpar}\}$$

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

Princípio da gaiola dos pombos na linguagem das funções

- *Sejam X e Y dois conjuntos finitos arbitrários não vazios tais que $|X| = n$ e $|Y| = m$. Se $n > m$ então não existe uma função $f : X \to Y$ tal que*

  $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \quad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

  ou seja, não existe nenhuma função injectiva de X em Y.

Demonstração. n bolas e m caixas:
Se existisse alguma função injectiva então cada caixa teria 0 ou 1 bola. Como temos m caixas, no máximo teríamos m bolas. Ou seja, ficariam bolas de fora e não estaríamos a colocar todas as bolas nas caixas.

Função tecto

- Definição: Dado $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ denota o menor dos inteiros que não é menor que x. Ou seja,

$$\lceil x \rceil := \min\{a \in \mathbb{Z} : a \geq x\}.$$

- Propriedades:
  - $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n.$
  - n, m, a inteiros,

$$a < \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \Rightarrow a < \frac{n}{m}.$$

  - $n > m \geq 1 \Rightarrow \lceil \frac{n}{m} \rceil \geq 2.$

Função tecto:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longrightarrow \lceil x \rceil$$

Exemplo.

$$\left\lceil \frac{11}{3} \right\rceil = 4, \quad 11 = 3 \times 3 + 2, \quad \frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}.$$

Princípio da gaiola dos pombos na linguagem das funções

- *Sejam X e Y dois conjuntos finitos arbitrários não vazios com $|X| = n > |Y| = m$, e $f : X \to Y$ uma função. Então*

  (a) *existe $a \in Y$ com $|f^{-1}(a)| \geq 2$.*

  (b) *f não é injectiva.*

  (c) *existe $a \in Y$ com $|f^{-1}(a)| \geq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$.*

Demonstração: $(a) \Leftrightarrow (b)$
(c) Por absurdo. Se $|f^{-1}(a)| < \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$, para todo o $a \in Y$, então $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{m}$, para todo o $a \in Y$.
Mas

$$n = |X| = \sum_{a \in Y} |f^{-1}(a)| < m\frac{n}{m} = n.$$

Ou seja, $n < n$, o que é absurdo.

Nota. $f^{-1}(a) = \{b \in X : f(b) = a\}$.

n bolas e n caixas

- *Se n objectos são colocados em n caixas e nenhuma delas fica vazia, então cada caixa contém exactamente um objecto.*

  Por absurdo. Suponhamos que existe uma caixa que não contém exactamente 1 objecto. Como não existem caixas vazias, essa caixa tem pelo menos dois objectos. Então não havendo caixas vazias, no total temos pelo menos $n + 1$ objectos. (!).

- *Se n objectos são colocados em n caixas e nenhuma delas contém mais que um objecto então cada caixa contém exactamente um objecto.*

  Por absurdo. Suponhamos que existe uma caixa que não contém exactamente 1 objecto. Como nenhuma das caixas tem mais do que 1 objecto, essa caixa tem 0 objectos. Então não havendo caixas com mais do que 1 objecto, no total temos no máximo $n - 1$ objectos. (!).

n bolas e n caixas/ funções injectivas e funções sobrejectivas

- *Se n objectos são colocados em n caixas e nenhuma delas fica vazia, então cada caixa contém exactamente um objecto.*
- *Se n objectos são colocados em n caixas e nenhuma delas contém mais que um objecto então cada caixa contém exactamente um objecto.*
  - Sejam X e Y conjuntos finitos e seja $f : X \to Y$ uma função de X para Y. Mostre que
    - Se X e Y têm o mesmo número de elementos e f é sobrejectiva, então f é injectiva.
    - Se X e Y têm o mesmo número de elementos e f é injectiva, então f é sobrejectiva.

Teorema

Forma simples do princípio das gaiolas dos pombos. Sejam n e m inteiros positivos tais que $n > m$. Suponhamos que temos de colocar n bolas idênticas em m caixas idênticas. Então existirá pelo menos uma caixa onde colocamos pelo menos duas bolas.

- *Sejam X e Y dois conjuntos finitos arbitrários não vazios com $|X| = n > |Y| = m$, e $f : X \to Y$ uma função. Então*
  (a) *existe $a \in Y$ com $|f^{-1}(a)| \geq 2$.*
  (b) *f não é injectiva.*
  (c) *existe $a \in Y$ com $|f^{-1}(a)| \geq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \geq 2$.*

Teorema

Forma generalizada do princípio das gaiolas dos pombos. Sejam n, m e r números inteiros positivos tais que $n > rm$. Suponhamos que colocamos n bolas idênticas em m caixas idênticas. Então existe pelo menos uma caixa onde colocamos pelo menos $r + 1$ bolas.

Demonstração. $\frac{n}{m} > \frac{rm}{m} = r$ então $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \geq r + 1$. A forma simples do princípio das gaiolas dos pombos é o mesmo que o caso especial desta forma com $r = 1$.