Aula 22: Números de Stirling de primeira e segunda espécie

oazenhas

Abril 27, 2015

Seja $n \geq 0$.

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

onde $s_{n,k} = (-1)^{n-k} c_{n,k}$ é o número de Stirling de primeira espécie.
Já provámos que

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),$$

onde $S_{n,k} = \#$ partições do conjunto $[n]$ em k blocos (não vazios), não interessando a ordem; número de Stirling de segunda espécie.

Consideremos o espaço vectorial V complexo dos polinómios de grau $\leq n$

$$V = \{a_k x^k + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : 0 \leq k \leq n, a_i \in \mathbb{C}\},$$

convencionamos grau do polinómio nulo igual a $-\infty$. Os conjuntos $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ e $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \ldots, x(x-1)\cdots(x-n+1)\}$ constituem duas bases para V. As igualdades

$$x^j = \sum_{k=0}^{j} S_{j,k} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), \quad 0 \leq j \leq n$$

e

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1) = \sum_{k=0}^{j} s_{j,k} x^k, \quad 0 \leq j \leq n$$

dizem que as matrizes de mudança de base são respectivamente $M = [m_{ij}] = [S_{j,i}]_{i,j\geq 0}$ e $N = [n_{ij}]_{i,j\geq 0} = [s_{j,i}]$, ambas matrizes, $n \times n$, triangulares superiores com 1's na diagonal (portanto, invertíveis). Note que $S_{j,i} = s_{j,i} = 0$ para $j < i$, e $S_{j,j} = s_{j,j} = 1$.

Exemplo $n = 4$, $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ e
$\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)\}$

$$M = \begin{pmatrix} S_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{1,1} & S_{2,1} & S_{3,1} & S_{4,1} \\ 0 & 0 & S_{2,2} & S_{3,2} & S_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & S_{3,3} & S_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^4 = S_{4,0}.1 + S_{4,1}x + S_{4,2}x(x-1) + S_{4,3}x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = s_{4,0}1 + s_{4,1}x + s_{4,2}x^2 + s_{4,3}x^3 + x^4$$

$$S_{0,0} = s_{0,0} = 1, \quad S_{j,0} = s_{j,0} = 0, j > 0, \quad S_{j,1} = 1, \quad S_{4,2} = 2^3 - 1, \quad S_{4,3} = \binom{4}{2}$$

$$s_{4,1} = (-1)^3 c_{4,1} = -3! = -6, \quad s_{4,2} = (-1)^2 c_{4,2} = 11, \quad s_{4,3} = (-1)c_{4,3} = -\binom{4}{2} = -6$$

Verifique que $MN = NM = I_4$.

Aplicação: Permutações conjugadas

Duas permutações σ e θ de $\mathfrak{S}_n$ são ditas *conjugadas* se existe $\xi \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\xi\sigma\xi^{-1} = \theta$.
Prova-se que duas permutações são conjugadas se e só se as suas decomposições cíclicas têm o mesmo tipo.
A relação "σ e θ são conjugadas" define uma relação de equivalência em $\mathfrak{S}_n$. As classes de equivalência são chamadas classes de conjugação.

Quantos elementos tem uma classe de conjugação de $\mathfrak{S}_n$?

Se a classe for consituída pelas permutações do tipo $(a_1, \ldots, a_n)$, o número de elementos da classe é

$$\frac{n}{a_1!1^{a_1}a_2!2^{a_2}\cdots a_n!n^{a_n}}$$

Quantas classes de conjugação existem em $\mathfrak{S}_n$? Quantos tipos de permutações de n elementos existem?

É igual ao número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$$

que é $p(n)$.