Aula 23: Função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_n$ com respeito ao número de inversões. Sinal de uma permutação.

oazenhas

Abril 28, 2015

Inversões de uma permutação de $\mathfrak{S}_n$

Definição Uma inversão da permutação $\pi \in \mathfrak{S}_n$ é um par (i, j) com $i < j$ e $\pi(i) > \pi(j)$.
Definição O conjunto das inversões da permutação $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n$ é o conjunto $\{(i, j) : i < j \text{ mas } a_i > a_j\}$, e $inv(\pi)$ é o número de inversões de π.

Por exemplo, a permutação $\pi = 4271365$ tem o conjunto de inversões $\{(1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 4); (3, 4); (3; 5); (3, 6); (3, 7); (6, 7)\}$ e $inv(\pi) = 9$.

Exercício. Mostre que

$$inv(\pi) = inv(\pi^{-1}); \quad 0 \leq inv(\pi) \leq \binom{n}{2} = n - 1 + \cdots + 2 + 1;$$

$$max_{\mathfrak{S}_n}(inv\pi) = n - 1 + \cdots + 2 + 1 = \binom{n}{2}$$

Função geradora de número de permutações de $\mathfrak{S}_n$ com respeito ao número de inversões

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_2} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = q^{inv(12)} + q^{inv(21)} = q^0 + q^1 = 1 + q$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = q^{inv(123)} + q^{inv(132)} + q^{inv(213)} + q^{inv(231)} + q^{inv(312)} + q^{inv(321)}$$

$$= q^0 + 2q + 2q^2 + q^3 = (1+q)(1+q+q^2)$$

Em $\mathfrak{S}_3$ existem 1 permutação com 0 inversões, 2 permutações com 1 inversão, 2 permutação com 2 inversões, 1 permutação com 3 inversões (número máximo de inversões de uma permutação em $\mathfrak{S}_3$).

Função geradora do número de permutações de $\mathfrak{S}_n$ com respeito ao número de inversões

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$

Demonstração por indução sobre n. O grau deste polinómio é $\binom{n}{2}$. O coeficiente de $q^{\binom{n}{2}}$ é 1, ou seja, existe apenas uma permutação em $\mathfrak{S}_n$ com $\binom{n}{2}$ inversões.

Sinal de uma permutação de $\mathfrak{S}_n$

Definição Definimos sinal de uma permutação π como sendo $(-1)^{inv\pi}$ e escrevemos $sgn\,\pi = (-1)^{inv\pi}$. Uma permutação diz-se par se $sgn\,\pi = 1$ e ímpar se $sgn\,\pi = -1$.

Fazendo $q = -1$ em

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}),$$

obtemos

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)} = 0$$

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} sgn\,\pi = 0$$

$$|\{\pi \in \mathfrak{S}_n : sgn(\pi) = 1\}| = n!/2 = |\{\pi \in \mathfrak{S}_n : sgn(\pi) = -1\}|.$$

Sinal de uma permutação e decomposição cíclica

Proposição Um ciclo de comprimento par (ímpar) é uma permutação ímpar (par). Uma permutação é par se e só se o número de ciclos de comprimento par é par. Uma permutação em $\mathfrak{S}_n$ cuja decomposição cíclica tem r ciclos tem sinal igual a $(-1)^{n-r}$.

Se $(a_1 a_2 \ldots a_m)$ é um ciclo de comprimento m, então

$$sgn\,(a_1 a_2 \ldots a_m) = (-1)^{m-1}.$$

Se ρ, $\pi \in \mathfrak{S}_n$, $sgn\,\rho\pi = sgn\,\rho.sgn\,\pi$.

Se $\pi = \pi_1 \cdots \pi_r$ é a decomposição cíclica de $\pi \in \mathfrak{S}_n$, onde os comprimentos dos ciclos são $k_1, \ldots, k_r$ respectivamente, então

$$sgn\,\pi = (-1)^{k_1-1}(-1)^{k_2-1} \cdots (-1)^{k_r-1} = (-1)^{n-r}.$$

Exemplo:

$$\pi = (23)(145)(67) \quad sgn\,\pi = (-1)^1(-1)^2(-1)^1 = (-1)^{7-3} = 1.$$

Aplicação: $A = [a_{ij}]$ matriz $n \times n$

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn\,\sigma\; a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

- Martin Aigner, A course in Enumeration, Springer, 2010.
- Federico Ardila, Enumerative Combinatorics
`http://math.sfsu.edu/federico/Clase/EC/ec.html`
- Keneth Bogart, Combinatorics Through Guided Discovery.
`http://www.math.dartmouth.edu/news-resources/electronic/kpbogart`
- Miklós Bóna, A Walk through Combinatorics, World Scientific, 2002.
- Richard Brualdi, Introductory Combinatorics, Pearson/Prentice Hall, 2010.
- Domingos M. Cardoso, Jerzy Szymanski, Mohammad Rostami, Matemática Discreta, Combinatória, Teoria dos grafos, Algoritmos, Escolar Editora, 2009.
- Charles W. Curtis, Pioneers of representation theory : Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer. [Providence, R.I.] : AMS ; [London] : LMS, 1999. XVI, 287 p., Série History of mathematics.
- Markus Fulmek, Christian Krattenthaler, Diskrete Mathematik, Wintersemester 2008/2009, Wien Universität.
- George E. Martin, Counting: The Art of Enumerative Combinatorics, Springer, 2001.
- J. M. Simões Pereira, Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória. Editora Luz da Vida, 2006.