Aula 4: Princípios elementares de contagem (continuação)

oazenhas

2015

- Dados inteiros $n, k \geq 0$,

$$\binom{n}{k} := \text{número de subconjuntos com } k \text{ elementos}$$
$$\text{de um conjunto com } n \text{ elementos}$$

$$= \text{número de maneiras de escolher } k \text{ elementos (sem reposição)}$$
$$\text{de um conjunto com } n \text{ elementos}$$

- O número total de subconjuntos de um conjunto com $n \geq 0$ elementos é 2^n. Então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \ n \geq 0$$

  O lado direito da igualdade é o número de subconjuntos de um conjunto com $n \geq 0$ elementos. Esse número, pelo princípio da soma, pode ser calculado contando o número de subconjuntos de cardinanal i, $\binom{n}{i}$, para $i = 1, \ldots, n$, e, em seguida somar tudo. É precisamente o que temos no lado esquerdo da igualdade.

- O lado esquerdo da igualdade acima é a soma da n-ésima linha do rectângulo de Pascal para $n \geq 0$.
- Soma da coluna 1 do rectângulo de Pascal até à linha n é igual ao elemento na linha $n+1$ e coluna 2

$$\binom{n+1}{2} = n + \cdots + 2 + 1,$$

- **Princípio da soma.** *Se* $S = S_1 \cup \cdots \cup S_t$ *é a união disjunta dos conjuntos* S_i*,* $i = 1, \ldots, t$*, então* $|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$*.*
- *Nota.* Se $|S_1| = |S_2| = \ldots = |S_t| = m$ então $|S| = tm$.

- **Princípio do produto.** Se $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$, onde S_1, $S_2, \ldots, S_t$ são t conjuntos não vazios e finitos, então

$$|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|.$$

- Se $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_t| = m$ então $|S| = m^t$.

  Se existem $\mathtt{a}$ *maneiras de realizar a tarefa* A *e* $\mathtt{b}$ *maneiras de realizar a tarefa* B *(não dependendo a tarefa* B *do modo como foi realizada a tarefa* A*) então existem* $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$ *maneiras de realizar a tarefa* A *seguida da tarefa* B*.*

Aplicação

- **1.** Determine o número de números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ que contêm o algarismo 5 uma e uma única vez.

$$4.8^3$$

- **2.** Determine o número de números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ que contêm o algarismo 5.

$$4.9^3?$$

NÃO!

5555 seria contado quatro vezes!

Usando os princípios da adição e do produto

- Contagem condicionada à primeira posição do 5 no número de quatro algarismos

  $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $B = A \setminus \{5\}$

$$E_1 = \{5xyz : x, y, z \in A\}$$

$$E_2 = \{x5yz : y, z \in A, x \in B\}$$

$$E_3 = \{xy5z : z \in A, x, y \in B\}$$

$$E_4 = \{xyz5 : x, y, z \in B\}$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4| = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| = 9^3 + 8.9^2 + 8^2.9 + 8^3$$

Regra do produto: Quando cada conjunto $S_i, i > 1$ depende das escolhas anteriores

- **Regra do produto.** Se $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$, onde S_1, $S_2, \ldots, S_t$ são t conjuntos não vazios e finitos, então $|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$.

- *Caso em que, para cada sequência* $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, \ldots, a_n) \in S$, *o conjunto* S_i, $i > 1$, *depende das componentes* $a_1, \ldots, a_{i-1}$.

  Princípio generalizado da multiplicação. Se efectuarmos uma sequência de t escolhas para o qual

  • existem k_1 maneiras possíveis de fazer a primeira escolha, e

  • para cada maneira de fazer as primeiras $i-1$ escolhas, existem k_i maneiras de fazer a i-ésima escolha,

  então podemos realizar a nossa sequência de escolhas em $k_1 . k_2 . \cdots . k_t$ maneiras.

Aplicações

- *Exemplo. Quantos números existem com quatro algarismos pertencentes ao conjunto* $\{1, \ldots, 9\}$ *de tal forma que nenhum número tenha dois dígitos iguais?*

  $S_1 = \{1, \ldots, 9\}$
  S_2 depende da escolha do primeiro algarismo
  S_3 depende da escolha dos dois primeiros e S_4 depende das três primeiras escolhas.

  $$9.8.7.6$$

- *Sejam* n *e* k *inteiros positivios satisfazendo* $n \geq k$. *Então o número de palavras de comprimento* k *no alfabeto* $\{1, \ldots, n\}$ *e sem repetição de letras é*

  $$n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

  Se $k = n$, obtemos $n!$.

- **Princípio da bijecção**. Sejam S e T dois conjuntos finitos. Se existe uma bijecção entre S e T então $|S| = |T|$.
- *Suponhamos que queremos contar os elementos de S. Se conhecermos o cardinal de T e formos capazes de definir uma bijecção entre S e T então ficamos a conhecer o cardinal de S.*
- **Proposição**. O número de subconjuntos de um conjunto X, onde $|X| = n$, é $2^{|X|} = 2^n$.

$$2^X := \{A : A \subseteq X\}, \text{ o conjunto de todos os subconjuntos de } X \text{ é dito}$$

$$\text{a potência do conjunto } X.$$

Prova: Já determinámos $|2^X| = 2^{|X|}$ por indução sobre $|X| = n$. Faremos agora um prova bijectiva. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $A \subseteq X$ fixado arbitrariamente. Vamos associar a A uma palavra do seguinte modo:

$x_1 \in A?$; $x_2 \in A?$; $\ldots$, $x_n \in A?$

Para cada uma das n perguntas só há duas respostas: Sim$= 1$; Não$= 0$.

A sequência de 0 e 1's de comprimento n definida por estas respostas define univocamente o conjunto A.

No total há $\underbrace{2.2.\ldots.2}_{n} = 2^n$ respostas o que dá o número total de conjuntos de X.

- Ou seja, consideremos a função

  $$f : 2^X \to T = \{\text{todas as palavras de comprimento } n \text{ no alfabeto } \{0,1\}\}$$

  $$f(A) = a_1 a_2 \cdots a_n \text{ onde } a_i = 1 \text{ se } x_i \in A, \text{ e } a_i = 0 \text{ caso contrário.}$$

- f injectiva

  $A, B \subseteq X$

  Se $f(A) = f(B) = a_1 a_2 \cdots a_n$ então $A = B = \{x_j \in X : a_j = 1\}$.

- f sobrejectiva: Dada a palavra $a_1 \cdots a_n \in T$, seja $A = \{x_i \in X : a_i = 1\}$. Então $f(A) = a_1 \cdots a_n$.

  Como f é bijectiva,

  $$|2^X| = 2^n = |T|.$$

- Exemplo: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  $$f(\{1, 3\}) = 101000$$

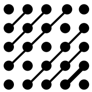
  Dada a palavra 110011 o conjunto que lhe corresponde é $\{1, 2, 5, 6\}$.

- **Princípio de contar de duas maneiras**. *Se duas fórmulas enumeram o mesmo conjunto então elas têm que ser iguais.*
- *Consideremos a identidade*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Vamos prová-la como consequência de uma outra. Esta última resulta de contar de duas maneiras um mesmo conjunto.

Vamos contar os pontos na grelha $(n+1)\times(n+1)$ de duas maneiras: $n=4$



• $n+1$ pontos por cada uma das $n+1$ linhas: $(n+1)^2$.

• contando os pontos dos dois triângulos, acima e abaixo da diagonal secundária, e adicionando os pontos desta diagonal: $2\sum_{i=1}^{n} i+(n+1)$.

Então das duas maneiras de contar os pontos, obtemos a igualdade

$$(n+1)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} i + (n+1).$$

A partir desta, por manipulação algébrica, podemos deduzir a primeira identidade

$$(n+1)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} i + (n+1).$$

$$(n+1)^2 - (n+1) = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$(n+1)n = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\frac{(n+1)n}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

Bonus

- **Proposição.** O número de subconjuntos com 2 elementos de $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ é igual a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.
- **Prova.** Por definição o número de subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com $n+1$ elementos é $\binom{n+1}{2}$. Já mostrámos, por indução sobre n, que $\displaystyle\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$, e, do resultado anterior temos então

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Vamos agora fazer uma demonstração por classificação dos subconjuntos com dois elemento de X de acordo com o maior elemento do subconjunto, e onde se usa seguidamente o princípio da soma.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja

$$S_i = \{\{i, x\} \subseteq X : 0 \leq x < i\} = \{\{0, i\}, \{\{1, i\}, \ldots, \{\{i-1, i\}\}$$

Bonus

$$S_i = \{\{i, x\} \subseteq X : 0 \leq x < i\} = \{\{0, i\}, \{\{1, i\}, \ldots, \{\{i-1, i\}\}$$

$$|S_i| = i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j$$

Pelo princípio da soma e do resultado anterior

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} |S_i| = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Bibliogarafia

- Martin Aigner, A course in Enumeration, Springer, 2010.
- Keneth Bogart, Combinatorics Through Guided Discovery.
- Miklós Bóna, A Walk through Combinatorics, World Scientific, 2002.
- Richard Brualdi, Introductory Combinatorics, Pearson/Prentice Hall, 2010.
- Domingos M. Cardoso, Jerzy Szymanski, Mohammad Rostami, Matemática Discreta, Combinatória, Teoria dos grafos, Algoritmos, Escolar Editora, 2009.
- J. M. Simões Pereira, Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória. Editora Luz da Vida. 2006.