

NÚMEROS (COEFICIENTES) DE LITTLEWOOD-RICHARDSON E SIMETRIAS

OLGA AZENHAS, ALESSANDRO CONFLITTI E RICARDO MAMEDE

RESUMO. Os números de Littlewood–Richardson são inteiros não negativos que dependem de um triplo de partições (μ, ν, λ) . Aparecem como coeficientes, por exemplo, na expansão linear do produto de dois polinómios de Schur, na decomposição do produto de duas classes de Schubert, na decomposição do produto tensorial de duas representações polinomiais irredutíveis do grupo linear, ou ainda na representação do grupo simétrico. Por outro lado, enumeram diversos objectos de natureza combinatória como *tableaux* de Littlewood–Richardson, *puzzles* de Knutson–Tao–Woodward e mosaicos de Purbhoo, entre outros. Obedecem a doze simetrias no sentido em que são invariantes para as permutações e a transposição simultânea de μ, ν, λ^\vee , onde λ^\vee é uma certa partição complementar de λ . Seis delas são, no sentido da complexidade computacional, *fáceis* de exibir em qualquer um dos modelos mencionados, constituindo um subgrupo de índice dois do grupo diedral de ordem doze. As seis restantes fora deste subgrupo, estão *escondidas* e são descritas por um único gerador que as reduz, com custo computacional linear, à involução de Schützenberger.

1. INTRODUÇÃO

Uma sequência de inteiros não negativos $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ com $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_d \geq 0$, é dita uma partição de m em d partes no máximo, denotada por $\nu \vdash m$, se $m = |\nu| := \nu_1 + \dots + \nu_d$. Chamam-se partes de ν aos termos não nulos desta, e o seu número $\ell(\nu)$ verifica $\ell(\nu) \leq d$. Identificamos uma partição com o seu diagrama de Young constituído por $\nu_1 + \dots + \nu_d$ caixas dispostas por d linhas, ajustadas à esquerda, de comprimentos $0 \leq \nu_d \leq \dots \leq \nu_2 \leq \nu_1$, lendo de cima para baixo. (Esta é a chamada notação francesa que adoptaremos neste texto. Observa-se que na inglesa, ao contrário desta, as linhas decrescem

em comprimento do topo para baixo.) Por exemplo, $\nu = (3, 3, 2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ e $|\nu| = 8$. Um *tableau* T *semistandard* com formato ν é um preenchimento das caixas do diagrama de Young de ν com elementos i no alfabeto $X = \{1, \dots, x\}$, $x \geq d$, subconjunto dos números naturais, satisfazendo às seguintes condições: os números crescem fracamente por linhas da esquerda para a direita; e crescem estritamente por colunas de baixo para cima. O vector definido pela sequência das multiplicidades de cada uma das letras do alfabeto X é dito o peso do *tableau* T . O conjunto de todos os *tableaux semistandard* no alfabeto X e formato ν é denotado por $Tab_X(\nu)$. Quando as $|\nu|$ caixas de T estão numeradas de 1 a $|\nu|$, dizemos que T é um *tableau standard*. O conjunto de todos os *tableaux standard* com formato ν é denotado por $ST(\nu)$. A palavra do *tableau* T é uma palavra no alfabeto X de comprimento $|\nu|$, obtida lendo o *tableau* por linhas, da esquerda para a direita, e de cima para baixo, denotada por $w(T)$. Por exemplo, se $X = \{1, \dots, 7\}$,

$\nu = (3, 3, 2)$, $P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \in Tab_X(\nu)$, com $w(P) = 56446234$ e peso $(0, 1, 1, 3, 1, 2, 0)$, e $Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 8 & \\ \hline 2 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \in ST(\nu)$. Dadas duas partições μ e λ com diagramas de Young tais que $\mu \subseteq \lambda$, definimos o diagrama enviesado λ/μ como sendo o diagrama que se obtém depois de retirarmos a λ a parte correspondente a μ . Um *tableau* com formato λ/μ no alfabeto X é um preenchimento do diagrama enviesado λ/μ de acordo com as regras acima. Define-se de modo análogo a palavra e o peso de um *tableau* com formato enviesado. Denotamos por $Tab_X(\kappa)$ o conjunto dos *tableaux semistandard* com formato enviesado κ . Se $\mu = (2, 1) \subseteq \lambda = (5, 4, 2)$,

$\kappa = \lambda/\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ é um diagrama enviesado, e $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & & \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & \\ \hline \end{array}$ é um *tableau semistandard* com formato λ/μ , palavra 14233122 e peso $(2, 3, 2, 1)$.

Dado um conjunto de indeterminadas $\{x_1, \dots, x_d\}$, o grupo simétrico \mathfrak{S}_d actua neste conjunto e consequentemente também no anel $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]$, por permutação das indeterminadas. Um polinómio em $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]$ é dito simétrico se é fixo para esta acção de \mathfrak{S}_d . Seja Λ_d o anel dos polinómios simétricos nas indeterminadas x_1, \dots, x_d , e Λ_d^m o subconjunto dos polinómios homogéneos de grau m . O anel Λ_d tem várias \mathbb{Z} -bases sendo uma delas constituída pelos chamados polinómios de Schur nas mesmas indeterminadas. Dado um *tableau* T com formato $\kappa = \lambda/\mu$ e peso (m_1, \dots, m_d) , associamos-lhe o monómio

$M_T = \prod_{1 \leq i \leq d} x_i^{m_i}$. Considere-se $d = 4$, $\kappa = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ e $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & & \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & \\ \hline \end{array}$, então $M_T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4$ é o monómio

associado a T . O polinómio $s_\kappa(x_1, \dots, x_d) = \sum_{T \in \text{Tab}_X(\kappa)} M_T$ é simétrico (homogéneo de grau $|\lambda| - |\mu|$) nas indeterminadas x_1, \dots, x_d . Se κ é o diagrama de Young de ν , $s_\nu(x_1, \dots, x_d) = \sum_{T \in \text{Tab}_X(\nu)} M_T \in \Lambda_d$ é o polinómio de Schur associado a ν nas mesmas indeterminadas. A regra de Littlewood–Richardson consiste em determinar os coeficientes inteiros $c_{\mu, \nu}^\lambda$ para todo o λ no máximo com d partes, ao exprimir o produto de dois polinómios de Schur em Λ_d na base dos polinómios de Schur, $s_\mu(x_1, \dots, x_d) s_\nu(x_1, \dots, x_d) = \sum_{\ell(\lambda) \leq d} c_{\mu, \nu}^\lambda s_\lambda(x_1, \dots, x_d)$. Os $c_{\mu, \nu}^\lambda$ são chamados os *números* ou *coeficientes de Littlewood–Richardson*, e a regra de Littlewood–Richardson descreve-os como o cardinal de certos conjuntos de objectos combinatórios que descreveremos na secção seguinte. Como $\{s_\nu : \ell(\nu) \leq d\}$ constitui uma \mathbb{Z} -base de Λ_d , podemos escrever o polinómio enviesado $s_\kappa(x_1, \dots, x_d) = \sum_{\ell(\nu) \leq d} c_{\kappa, \nu} s_\nu(x_1, \dots, x_d)$, e pode mostrar-se que $c_{\kappa, \nu} = c_{\mu, \nu}^\lambda$ (veja-se [10, 18]). A importância destes coeficientes reside no facto do anel Λ_d e, em particular, os polinómios de Schur ocorrerem em outras situações, por exemplo: o produto tensorial de duas representações polinomiais irredutíveis V^μ e V^ν do grupo linear geral $GL_d(\mathbb{C})$ decompõe-se em representações irredutíveis do $GL_d(\mathbb{C})$, $V^\mu \otimes V^\nu = \sum_{\ell(\lambda) \leq d} c_{\mu, \nu}^\lambda V^\lambda$; as classes de Schubert σ_λ formam uma base linear para $H^*(G(d, n))$, o anel de cohomologia do Grassmanniano $G(d, n)$ dos subespaços lineares de dimensão d de \mathbb{C}^n , e $\sigma_\mu \sigma_\nu = \sum_{\lambda \subseteq d \times (n-d)} c_{\mu, \nu}^\lambda \sigma_\lambda$, onde $d \times (n-d)$ denota a partição rectangular com d partes iguais a $n-d$, para $0 \leq d \leq n$.

2. A REGRA DE LITTLEWOOD–RICHARDSON E A CORRESPONDÊNCIA DE ROBINSON–SCHENSTED–KNUTH

A regra de Littlewood–Richardson foi formulada pela primeira vez em [9], contudo a sua demonstração só ocorreu posteriormente, estando esta intimamente relacionada com importantes construções combinatórias tais como a correspondência de Robinson–Schensted–Knuth [15, 16, 6] e o *jeu de taquin* de M.-P. Schützenberger [17]. (Para saber mais veja-se [8]). Apresentaremos aqui uma prova devida a S. Kerov [5] usando o polinómio de Schur s_κ associado a um diagrama enviesado κ .

Dado $n \in \mathbb{N}$, a correspondência de Robinson–Schensted–Knuth [15, 16, 6] estabelece uma bijecção F entre o conjunto das palavras de comprimento n no alfabeto X e pares de *tableaux* (P, Q) , com o mesmo formato, sendo P um *tableau semistandard* no alfabeto X , chamado de inserção, e Q um *tableau standard*, chamado de registo,

$$F : \begin{array}{l} X^n \cong \bigsqcup_{\nu \vdash n} \text{Tab}_X(\nu) \times ST(\nu) \\ w \longrightarrow (P, Q) \end{array}.$$

Concluimos que o número de palavras que tem P por *tableau* de inserção é igual ao número de *tableaux standard* Q com o formato de P . O teorema seguinte generaliza este resultado para palavras de *tableaux* enviesados no sentido em que também esse número apenas depende do formato de P .

Teorema 1. (Hillman, Grassl 1980 [4]; White 1981 [19]) Seja κ um diagrama enviesado. Identificamos $\text{Tab}_X(\kappa)$ com o subconjunto de X^n das palavras de todos os *tableaux* em $\text{Tab}_X(\kappa)$. Então, a restrição de F a $\text{Tab}_X(\kappa)$, é uma bijecção

$$F|_{\text{Tab}_X(\kappa)} : \begin{array}{l} \text{Tab}_X(\kappa) \cong \bigsqcup_{\nu \vdash n} \text{Tab}_X(\nu) \times Q_\nu(\kappa), \quad \text{onde } Q_\nu(\kappa) \subseteq ST(\nu), \\ T \longrightarrow (P_T, Q_T) \end{array}$$

e P_T, Q_T são respectivamente os *tableaux* de inserção e de registo da palavra de T .

Sobre este resultado, veja-se também [14]. Consideremos $\text{Tab}^0(\kappa, \nu)$ o subconjunto de $\text{Tab}_X(\kappa)$ formado pelos *tableaux* com peso ν cujas palavras são tais que para todo o sufixo, o número de letras i é pelo menos igual ao número de letras $i+1$, $i \geq 1$. Estes *tableaux* são chamados de Littlewood–Richardson

(abreviadamente LR). Por exemplo, para $\lambda = (6, 4, 3)$, $\mu = (2, 1)$ e $\nu = (5, 3, 2)$, $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \in \text{Tab}^0(\kappa, \nu)$,

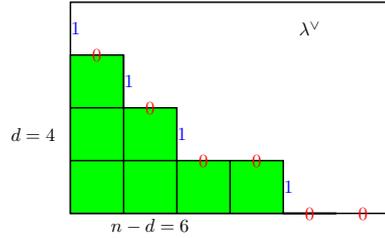
$$w(T) = 2331221111 \xrightarrow{F} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, Q_T \right).$$

Corollary 1. [5] Na correspondência anterior, $T \longrightarrow Q_T$ é uma bijecção. Donde $|\text{Tab}^0(\kappa, \nu)| \cong |Q_\nu(\kappa)|$ e $|\text{Tab}^0(\kappa, \nu)| = |Q_\nu(\kappa)|$, onde $|\cdot|$ denota cardinal.

A correspondência de Robinson–Schensted–Knuth, permite escrever, $s_\kappa(x_1, \dots, x_d) = \sum_{T \in \text{Tab}_X(\kappa)} M_T = \sum_{\ell(\nu) \leq d} |Q_\nu(\kappa)| \sum_{P \in \text{Tab}_X(\nu)} M_P = \sum_{\ell(\nu) \leq d} |Q_\nu(\kappa)| s_\nu$. Concluimos então do Corolário 1 que a regra de Littlewood–Richardson dá as constantes da multiplicação na base das funções de Schur do seguinte modo: $c_{\mu, \nu}^\lambda = c_{\kappa, \nu} = |Q_\nu(\kappa)| = |\text{Tab}^0(\lambda/\mu; \nu)|$.

3. TABLEAUX DE LITTLEWOOD–RICHARDSON, PUZZLES DE KNUTSON–TAO–WOODWARD E SIMETRIAS

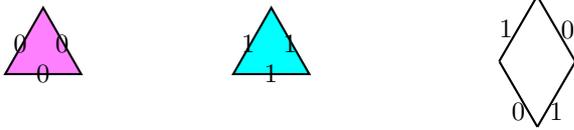
Os números de Littlewood–Richardson obedecem a doze simetrias. Escrevendo $c_{\mu\nu\lambda}$ como sendo $c_{\mu\nu}^{\lambda^\vee}$, eles são invariantes para a acção do grupo diedral $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_3$ onde o elemento não nulo de \mathbb{Z}_2 transpõe simultaneamente μ, ν, λ , e \mathfrak{S}_3 permuta-os: $c_{\mu\nu\lambda} = c_{\mu^t\nu^t\lambda^t}$ e $c_{\mu\nu\lambda}$ é simétrico em (μ, ν, λ) . Estamos a considerar os diagramas de Young no canto sudoeste de um rectângulo fixo $d \times (n-d)$, $0 \leq d \leq n$, de altura d e largura $n-d$. O diagrama de λ^\vee é o complementar de λ nesse rectângulo, rodado de 180 graus, enquanto λ^t é a reflexão de λ sobre o eixo nordeste–sudoeste. Assim as partições λ são identificadas com seqüências binárias de comprimento n , com $n-d$ 0's e d 1's como se segue: começando no canto inferior direito do rectângulo e terminando no canto superior esquerdo, os zeros e os uns na palavra binária correspondem respectivamente aos passos horizontais e verticais ao longo da fronteira do correspondente diagrama de Young. Por exemplo, na figura abaixo, com $d = 4$, $n = 10$, a partição $\lambda = (4, 2, 1, 0)$



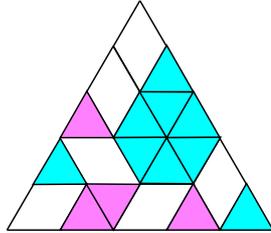
identifica-se com a palavra binária 0010010101 como descrito, $\lambda^\vee = (6, 5, 4, 2)$ com 1010100100, e λ^t com 0101011011. O *tableau* de LR considerado anteriormente representa-se, com $n = 9$ e $d = 3$, por

2	3	3		
1	2	2		
	1	1	1	1

e diz-se um *tableau* de LR com fronteira (μ, ν, λ^\vee) . Um *puzzle* KTW [7] de tamanho n é uma pavimentação de um triângulo equilátero de lado n com peças unitárias dos três tipos abaixo



onde as etiquetas de duas quaisquer arestas vizinhas são concordantes. As peças do *puzzle* podem ser rodadas em qualquer orientação mas não reflectidas. Ao triplo (μ, ν, λ) de partições, como listas de etiquetas de comprimento n , em cada uma das arestas no *puzzle* de lado n , lidas no sentido horário a partir do canto esquerdo, chamamos fronteira do *puzzle*. Exemplo de um *puzzle* de tamanho $n = 5$, fronteira $\mu = 01011$, $\nu = 01101$ e $\lambda = 10101$, no sentido horário começando no canto esquerdo,



As partições μ, ν e λ na fronteira do *puzzle*, como palavras binárias, têm exactamente d 1's e $n-d$ 0's, onde d é o tamanho do triângulo equilátero constituído pelos triângulos azuis unitários, e $n-d$ o tamanho do constituído pelos triângulos unitários de cor rosa. Efectuando uma reflexão vertical e trocando os 0's com os 1's, obtém-se o *puzzle* dual com fronteira $(\nu^t, \mu^t, \lambda^t)$.

Teorema 2. (Knutson–Tao–Woodward, 2004 [7]) $c_{\mu\nu\lambda}$ é o número de puzzles com fronteira μ, ν e λ , no sentido dos ponteiros do relógio.

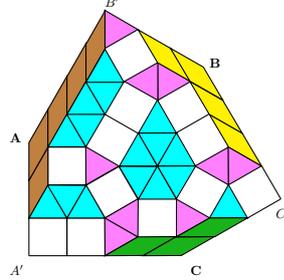
Os *puzzles* e os *tableaux* de LR estão em bijecção [7]. Uma delas é a chamada bijecção de T. Tao *sem palavras* que aparece em [20, 13]. No caso dos *puzzles*, seis das simetrias diedrais, nomeadamente, rotações de $\pi/3$ e reflexões com os 0's e 1's trocados entre si, são óbvias: os números de LR são invariantes para permutações cíclicas, e $c_{\mu\nu\lambda} = c_{\nu^t\mu^t\lambda^t} = c_{\mu^t\lambda^t\nu^t} = c_{\lambda^t\nu^t\mu^t}$. Pondo $\mathbb{Z}_2 = \{0, \tau\}$ e $\mathfrak{S}_3 = \langle s_1, s_2 \rangle$, este grupo de simetrias $\mathbf{H} = \langle \tau s_1, \tau s_2 \rangle = \{1, \tau s_1, \tau s_2 s_1 s_2, \tau s_2, s_1 s_2, s_2 s_1\}$ é um subgrupo de índice dois do grupo diedral $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_3$. A acção de \mathbf{H} nos *tableaux* de LR é também facilmente exibida por bijecções de custo computacional linear [2]. O subgrupo $\langle s_1 s_2, s_2 s_1 \rangle$ de índice dois de \mathfrak{S}_3 já havia sido estudado por Pak e Vallejo em [11]. As restantes simetrias, na outra classe lateral $\mathbf{H}\tau = \mathbf{H}s_1 = \mathbf{H}s_2 = \mathbf{H}s_1 s_2 s_1 =$

$H\tau s_1 s_2 = H\tau s_2 s_1$, são difíceis de exibir e são dadas por bijecções computacionalmente, linearmente redutíveis à operação reversa ϵ de Benkart-Sottile-Stroomer [3] em *tableaux* de LR [1, 2]. Pak e Vallejo [12] provaram que muitas bijecções em *tableaux* de Young são linearmente equivalentes no sentido da complexidade computacional, e, em particular, que a operação reversa ϵ é linearmente equivalente à involução de Schützenberger [17]. Denote-se por \bullet a involução rotação de π num *tableau*, de custo linear [12], e respectivamente por \blacklozenge e \clubsuit as bijecções em *tableaux* de LR definidas por $\tau s_1 s_2 s_1 = \tau s_2 s_1 s_2$ e τs_2 .

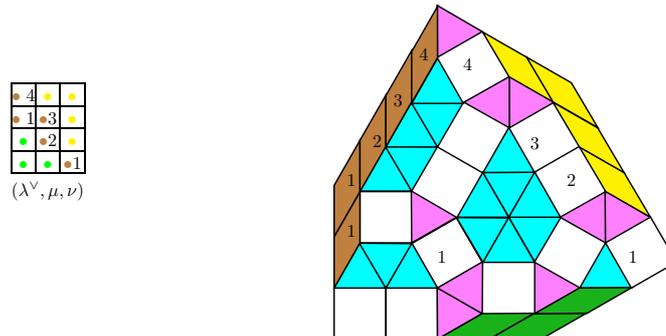
Teorema 3. [11, 1, 2] $H = \{1, \clubsuit, \blacklozenge, \clubsuit\blacklozenge, \blacklozenge\clubsuit, \clubsuit\blacklozenge\clubsuit = \blacklozenge\clubsuit\blacklozenge = \spadesuit\} = \langle \clubsuit, \blacklozenge \rangle \simeq \mathfrak{S}_3$ formam um subgrupo de índice 2 de $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_3$ com custo computacional linear. A comutatividade $\rho = \epsilon \bullet$ e a transposição $\varrho = \blacklozenge \epsilon \bullet$ são de complexidade linearmente redutíveis entre si, e, em particular, à involução de Schützenberger. Além disso, $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_3 = \langle \clubsuit, \blacklozenge, \rho : \rho^2 = \clubsuit^2 = \blacklozenge^2 = (\clubsuit\blacklozenge)^3 = (\blacklozenge\clubsuit)^2 = (\blacklozenge\rho)^2 = 1 \rangle$.

4. MOSAICOS DE PURBHOO E SIMETRIAS

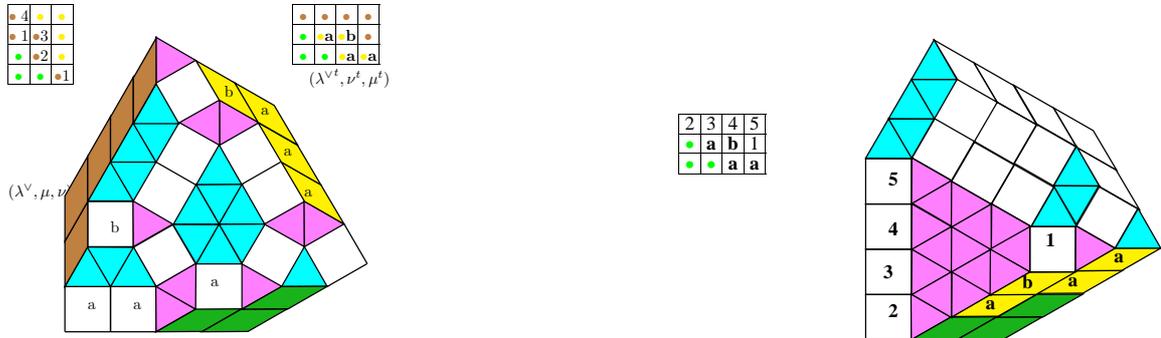
Se por um lado, os *puzzles* são objectos mais simétricos que os *tableaux* de LR, por outro, existe para estes últimos, a operação *jeu de taquin* [17] na qual se baseiam muitas das bijecções que exibem as simetrias. Os mosaicos de Purbhoo [13] são um modelo que interpola entre aqueles dois. Consideremos um *puzzle* de lado n e substituamos os rombos por quadrados unitários. O *puzzle* ficará distorcido, contudo, uma figura convexa pode ser recuperada adicionando rombos estreitos com ângulos de 150 e 30 graus às três arestas distorcidas do *puzzle*. A figura resultante, sem as etiquetas, chamada mosaico,



é um hexágono de vértices A', A, B', B, C', C (listados no sentido horário) com ângulos de 150 graus em A, B, C , 90 graus nos restantes, e comprimentos $A'A = B'B = C'C = n - d$ e $AB' = BC' = CA' = d$, pavimentado com (a) triângulos unitários; (b) quadrados unitários; e (c) rombos unitários com ângulos de 30 e 150 graus, arrumados nos vértices A, B e C . As colecções dos rombos nos cantos A, B e C , denotadas respectivamente por α, β e γ , definem a fronteira (α, β, γ) do mosaico. Existe uma bijecção natural entre mosaicos e *puzzles*. Os nichos α, β , e γ são diagramas de Young, codificados por palavras binárias: retiram-se todos os rombos e, caminhando ao longo da fronteira da figura resultante, no sentido horário, de A' para B' , põe-se 1 por cada passo na direcção de $\overrightarrow{AB'}$, e 0 na direcção $\overrightarrow{AA'}$, e, em seguida, esticam-se as bordas a partir de A', B' , e C' , e propagam-se as etiquetas de acordo com a regra das peças num *puzzle*. (Caminhando no sentido anti-horário de C' para B' , obtém-se de modo análogo, o *puzzle* dual.) Na orientação *standard* um mosaico com fronteira (α, β, γ) identifica-se com um *puzzle* de fronteira (μ, ν, λ) . Purbhoo definiu a operação *migração* nos mosaicos, que se baseia no movimento de um rombo de um canto para outro, e que corresponde a um movimento do *jeu de taquin* em *tableaux* de LR e, por sua vez, a um rearranjo das peças no *puzzle*. A migração da esquerda para a direita dá uma bijecção entre mosaicos de fronteira (α, β, γ) e *tableaux* de LR de fronteira (λ^\vee, μ, ν) onde $\nu = \beta$, $\lambda^\vee = \gamma$ e $\mu = \alpha$ e que coincide com a bijecção sem palavras de Tao [20], entre *tableaux* de LR com fronteira (λ^\vee, μ, ν) e *puzzles* com fronteira (μ, ν, λ) como se ilustra abaixo,



As bijecções definidas pela acção do grupo \mathbf{H} em *puzzles* e em *tableaux* de LR são exactamente aquelas que se obtêm em mosaicos quando se traduz a operação migração na bijecção de Tao. Por exemplo, a migração do lado direito para o lado esquerdo do mosaico, dos rombos aninhados em β , lendo o diagrama por eles formado no sentido anti-horário, coincide com a bijecção de Tao no lado detrás do mosaico: reflecte-se o mosaico segundo o eixo vertical e trocam-se as cores do *puzzle* entre si,



migration right-left+reflection

Isto define simultaneamente a involução \clubsuit em *puzzles* e em *tableaux* de LR, como se ilustra acima. Para mais detalhes veja-se [2].

REFERÊNCIAS

- [1] O. Azenhas, A. Conflitti e R. Mamede. *Linear time equivalent Littlewood–Richardson coefficient maps*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science Proceedings, AK, (2009) 127–144.
- [2] O. Azenhas, A. Conflitti e R. Mamede. *On an index two subgroup of puzzle and Littlewood–Richardson tableau $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$ -symmetries* (Extended abstract), Preprint DMUC 09–51, 2009. Slides da apresentação in the 63th Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Bertinoro, Italy, September 27–30, 2009; <http://www.emis.de/journals/SLC/>
- [3] Georgia Benkart, Frank Sottile, Jeffrey Stroomer. *Tableau switching: algorithms and applications*, J. Combin. Theory Ser. A 76 (1996), 11–34.
- [4] A. P. Hillman e R. M. Grassl. *Skew-tableaux and the insertion algorithms*, J. Combin. Inform. System Sci. 5 (1980), 305–316.
- [5] S. Kerov. *The Robinson–Schensted–Knuth correspondence and the Littlewood–Richardson rule*, Uspekhi Mat. Nauk 39 (1984), no. 2(236), 161–162 (em russo), tradução em Russ. Math. Surv. 39, No. 2, (1984) 165–166 (1984).
- [6] D. E. Knuth. *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific. J. Math. 34 (1980), 709–727.
- [7] A. Knutson, T. Tao e C. Woodward. *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products. II: Puzzles determine facets of the Littlewood–Richardson cone*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), 19–48.
- [8] M. A. A. van Leeuwen. *The Littlewood–Richardson rule and related combinatorics* Interaction of combinatorics and representation theory, MSJ Mem., 11, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2001), 95–145.
- [9] D. E. Littlewood e A. R. Richardson. *Group characters and algebra*, Philos. Trans. R. Soc. London A (1934), 99–142.
- [10] I. G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, New York 1995.
- [11] I. Pak e E. Vallejo. *Combinatorics and geometry of Littlewood–Richardson cones*, European J. Combin. (2005), 995–1008.
- [12] I. Pak e E. Vallejo. *Reductions of Young tableau bijections*, SIAM J. Discrete Math. 24 (2010), 113–145.
- [13] K. Purbhoo. *Puzzles, tableaux, and mosaics*, J. Algebraic Combin. 28 (2008), 461–480.
- [14] J. B. Remmel e R. Whitney. *Multiplying Schur functions*, J. Algorithms 5 (1984), 471–487.
- [15] G. de B. Robinson. *On the representation of the symmetric group*, Amer. J. Math 60 (1938), 745–760.
- [16] C. Schensted. *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canad. J. Math. 13 (1961), 179–191.
- [17] M. P. Schützenberger. *La Correspondence de Robinson*, in Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis–Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976). Lecture Notes in Mathematics, vol. 579, pp. 59–113, Springer, Berlin 1977.
- [18] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, vol.2, Cambridge University Press, Cambridge 1999.
- [19] D. E. White. *Some connections between the Littlewood–Richardson rule and the construction of Schensted*, J. Combin. Theory Ser. A 30 (1981), 237–247.
- [20] R. Vakil. *A geometric Littlewood–Richardson rule*, Ann. of Math. 164 (2006), 371–421.

CMUC, CENTRO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE COIMBRA, APARTADO 3008, 3001–454 COIMBRA, PORTUGAL
E-mail address: {ozenhas, conflitt, mamede}@mat.uc.pt