Os números (coeficientes) de Littlewood-Richardson e simetrias

Olga Azenhas

CMUC, Universidade de Coimbra

1. Os *coeficientes* de Littlewood-Richardson $c^{\lambda}_{\mu\,\nu}$

- As funções de Schur constituem uma base (linear) para a álgebra das funções simétricas

1. Os *coeficientes* de Littlewood-Richardson $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$

- As funções de Schur constituem uma base (linear) para a álgebra das funções simétricas

  - $x = (x_1, x_2, \dots), \quad n \in \mathbb{N}$,
    função simétrica homogénea de grau n sobre $\mathbb{Q}$

    $$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha,$$

    - ★ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ é uma partição de n,
    - ★ $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \dots,$
    - ★ $c_\alpha \in \mathbb{Q}$

1. Os *coeficientes* de Littlewood-Richardson $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$

- As funções de Schur constituem uma base (linear) para a álgebra das funções simétricas
  - $x = (x_1, x_2, \dots), \quad n \in \mathbb{N}$,
    função simétrica homogénea de grau n sobre $\mathbb{Q}$
    $$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha,$$
    - $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ é uma partição de n,
    - $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \dots,$
    - $c_\alpha \in \mathbb{Q}$
  - s_μ função de Schur associada à partição μ
    $$s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda} c_{\mu\,\nu}^{\lambda} s_\lambda.$$

- Decomposição do produto tensorial de duas representações polinomiais irredutíveis V^μ e V^ν do grupo linear geral $GL_d(\mathbb{C})$ em representações irredutíveis do $GL_d(\mathbb{C})$

$$V^\mu \otimes V^\nu = \sum_{l(\lambda)\leq d} c^{\lambda}_{\mu\,\nu} V^\lambda.$$

- Decomposição do produto tensorial de duas representações polinomiais irredutíveis V^μ e V^ν do grupo linear geral $GL_d(\mathbb{C})$ em representações irredutíveis do $GL_d(\mathbb{C})$

$$V^\mu \otimes V^\nu = \sum_{l(\lambda)\leq d} c_{\mu\,\nu}^{\lambda} V^\lambda.$$

- As classes de Schubert σ_λ formam uma base linear para $H^*(G(d,n))$, o anel de cohomologia do Grassmanniano $G(d,n)$ dos subespaços lineares de dimensão d de $\mathbb{C}^n$,

$$\sigma_\mu \sigma_\nu = \sum_{\lambda\subseteq d\times(n-d)} c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \sigma_\lambda.$$

- Decomposição do produto tensorial de duas representações polinomiais irredutíveis V^μ e V^ν do grupo linear geral $GL_d(\mathbb{C})$ em representações irredutíveis do $GL_d(\mathbb{C})$

$$V^\mu \otimes V^\nu = \sum_{l(\lambda)\leq d} c_{\mu\,\nu}^{\lambda} V^\lambda.$$

- As classes de Schubert σ_λ formam uma base linear para $H^*(G(d,n))$, o anel de cohomologia do Grassmanniano $G(d,n)$ dos subespaços lineares de dimensão d de $\mathbb{C}^n$,

$$\sigma_\mu \sigma_\nu = \sum_{\lambda \subseteq d\times(n-d)} c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \sigma_\lambda.$$

- Existem matrizes $n \times n$ não singulares A, B e C, sobre um *domínio local de ideais principais*, com invariantes de Smith $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ and $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ respectivamente, tal que $AB = C$ se e só se $c_{\mu\,\nu}^{\lambda} > 0$.

- Decomposição do produto tensorial de duas representações polinomiais irredutíveis V^μ e V^ν do grupo linear geral $GL_d(\mathbb{C})$ em representações irredutíveis do $GL_d(\mathbb{C})$

$$V^\mu \otimes V^\nu = \sum_{l(\lambda)\leq d} c_{\mu\,\nu}^{\lambda} V^\lambda.$$

- As classes de Schubert σ_λ formam uma base linear para $H^*(G(d,n))$, o anel de cohomologia do Grassmanniano $G(d,n)$ dos subespaços lineares de dimensão d de $\mathbb{C}^n$,

$$\sigma_\mu \sigma_\nu = \sum_{\lambda\subseteq d\times(n-d)} c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \sigma_\lambda.$$

- Existem matrizes $n\times n$ não singulares A, B e C, sobre um *domínio local de ideais principais*, com invariantes de Smith $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ and $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ respectivamente, tal que $AB=C$ se e só se $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}>0$.
- Existem matrizes $n\times n$ Hermíticas A, B e C, com valores próprios inteiros ordenados por ordem não crescente $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ e $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ respectivamente, tal que $C=A+B$ se e só se $c_{\mu,\nu}^{\lambda}>0$.

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$?

- $c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \geq 0$.

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$?

- $c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \geq 0$.
- As simetrias de $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$ com respeito a μ, ν e λ são importantes em muitos problemas com os quais estes coeficientes estão relacionados.

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c^{\lambda}_{\mu\,\nu}$?

- $c^{\lambda}_{\mu\,\nu} \geq 0$.
- As simetrias de $c^{\lambda}_{\mu\,\nu}$ com respeito a μ, ν e λ são importantes em muitos problemas com os quais estes coeficientes estão relacionados.

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$?

- $c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \geq 0$.
- As simetrias de $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$ com respeito a μ, ν e λ são importantes em muitos problemas com os quais estes coeficientes estão relacionados.
  - Que objectos interessantes é que estes coeficientes enumeram?

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$?

- $c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \geq 0$.
- As simetrias de $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$ com respeito a μ, ν e λ são importantes em muitos problemas com os quais estes coeficientes estão relacionados.
  - Que objectos interessantes é que estes coeficientes enumeram?
    - certos tableaux de Young

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c^{\lambda}_{\mu\,\nu}$?

- $c^{\lambda}_{\mu\,\nu} \geq 0$.
- As simetrias de $c^{\lambda}_{\mu\,\nu}$ com respeito a μ, ν e λ são importantes em muitos problemas com os quais estes coeficientes estão relacionados.
    - Que objectos interessantes é que estes coeficientes enumeram?
        - certos tableaux de Young
        - Puzzles de Knutson-Tao-Woodward

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$?

- $c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \geq 0$.
- As simetrias de $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$ com respeito a μ, ν e λ são importantes em muitos problemas com os quais estes coeficientes estão relacionados.
    - Que objectos interessantes é que estes coeficientes enumeram?
        - certos tableaux de Young
        - Puzzles de Knutson-Tao-Woodward
        - Mosaicos de Purbhoo

Porque é que os combinatorialistas se interessam pelos coefientes $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$?

- $c_{\mu\,\nu}^{\lambda} \geq 0$.
- As simetrias de $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$ com respeito a μ, ν e λ são importantes em muitos problemas com os quais estes coeficientes estão relacionados.
    - Que objectos interessantes é que estes coeficientes enumeram?
        - ⋆ certos tableaux de Young
        - ⋆ Puzzles de Knutson-Tao-Woodward
        - ⋆ Mosaicos de Purbhoo
        - ⋆ $\vdots$

2- A regra de Littlewood-Richardson (D. E. Littlewood, A. R. Richardson (1934))

- Correspondência de Robinson-Schensted-Knuth

Example

$n = 8$

$$\nu = (3, 3, 2) \equiv$$

2- A regra de Littlewood-Richardson (D. E. Littlewood, A. R. Richardson (1934))

- Correspondência de Robinson-Schensted-Knuth

Example

$n = 8$

$$\nu = (3,3,2) \equiv \ydiagram{2,3,3}$$

2- A regra de Littlewood-Richardson (D. E. Littlewood, A. R. Richardson (1934))

- Correspondência de Robinson-Schensted-Knuth

Example

$n = 8$

$$\nu = (3,3,2) \equiv \begin{array}{|c|c|c}\hline & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array} \qquad P = \begin{array}{|c|c|c}\hline 5 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array}$$

2- A regra de Littlewood-Richardson (D. E. Littlewood, A. R. Richardson (1934))

- Correspondência de Robinson-Schensted-Knuth

Example

$n = 8$

$$\nu = (3,3,2) \equiv \begin{array}{|c|c|c}\cline{1-2} & & \\ \hline & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array} \qquad P = \begin{array}{|c|c|c}\cline{1-2} 5 & 6 & \\ \hline 4 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c}\cline{1-2} 6 & 8 & \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{7} \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline \end{array}$$

2- A regra de Littlewood-Richardson (D. E. Littlewood, A. R. Richardson (1934))

• Correspondência de Robinson-Schensted-Knuth

Example

$n = 8$

$$\nu = (3,3,2) \equiv \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-2} & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \qquad P = \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-2} 5 & 6 \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-2} 6 & 8 \\ \hline 2 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$w(P) = 56446234, \qquad P \in Tab(\nu), \qquad Q \in ST(\nu).$

2- A regra de Littlewood-Richardson (D. E. Littlewood, A. R. Richardson (1934))

• Correspondência de Robinson-Schensted-Knuth

Example

$n = 8$

$$\nu = (3,3,2) \equiv \begin{array}{|c|c|c} \hline & & \\ \hline & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array} \qquad P = \begin{array}{|c|c|c} \hline 5 & 6 & \\ \hline 4 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c} \hline 6 & 8 & \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{7} \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline \end{array}$$

$w(P) = 56446234, \qquad P \in Tab(\nu), \qquad Q \in ST(\nu).$

- X alfabeto totalmente ordenado, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rl} F: & X^n \longrightarrow \coprod_{\nu \vdash n} Tab_X(\nu) \times ST(\nu) \\ & w \longrightarrow (P(w), Q(w)) \end{array}$$

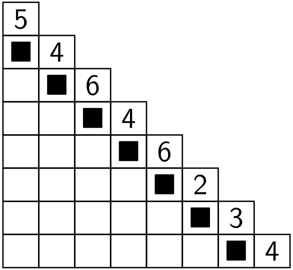
Jeu de taquin

- construção devida a Marcel-Paul Schützenberger inspirada no *puzzle 15* (*le taquin*) (1976).

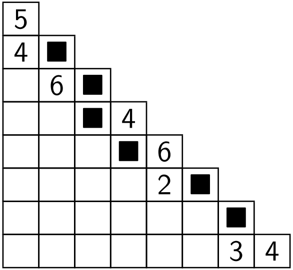
$w = 54646234 \longrightarrow P(w)$

5							
	4						
		6					
			4				
				6			
					2		
						3	
							4

$w = 54646234 \longrightarrow P(w)$



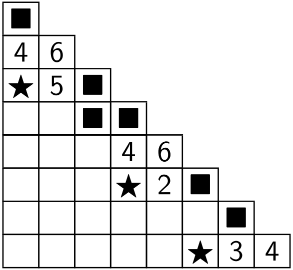
$w = 54646234 \longrightarrow P(w)$



$w = 54646234 \longrightarrow P(w)$

5							
4	■						
	6	■					
		■	■				
			4	6			
				2	■		
						■	
						3	4

$w = 54646234 \longrightarrow P(w)$



$w = 54646234 \longrightarrow P(w)$

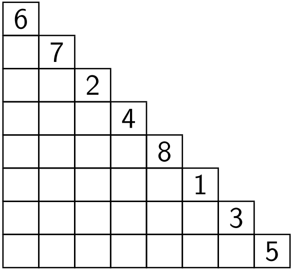
■							
★	6						
4	5	■					
		■	■				
			4	6			
			2	★	■		
						■	
					3	★	4

$w = 54646234 \longrightarrow P(w)$

$$\begin{ytableau}
\ \\
\ & \ \\
\ & \ & \ \\
\ & \ & \ & \ \\
\ & \ & \ & \ & \ \\
5 & 6 & \ & \ & \ & \ \\
4 & 4 & 6 & \ & \ & \ & \ \\
2 & 3 & 4 & \ & \ & \ & \ & \
\end{ytableau}$$

$$w = 54646234 \longrightarrow P(w) = \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-2} 5 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$w = 54646234 \longrightarrow (P, Q(w))$



$$w = 54646234 \longrightarrow \left(P(w) = \begin{array}{|c|c|c}\hline 5 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \hline \end{array},\ Q(w) = \begin{array}{|c|c|c}\hline 6 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{8} \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline \end{array}\right)$$

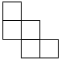
- (Hillman, Grassl 1980; White 1981) Seja κ um diagrama enviezado

  $$\ydiagram{1,2,1+2}.$$

  Identificamos $Tab_X(\kappa)$ com o subconjunto de X^n das palavras no alfabeto X obtidas lendo os conteúdos de todos os tableaux $\in Tab_X(\kappa)$

  $$F|Tab_X(\kappa) \quad : Tab_X(\kappa) \longrightarrow \bigsqcup_{\nu \vdash n} Tab_X(\nu) \times Q_\nu(\kappa), \quad Q_\nu(\kappa) \subseteq ST(\nu)$$

- (Hillman, Grassl 1980; White 1981) Seja κ um diagrama enviezado

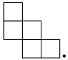


  Identificamos $Tab_X(\kappa)$ com o subconjunto de X^n das palavras no alfabeto X obtidas lendo os conteúdos de todos os tableaux $\in Tab_X(\kappa)$

$$F|Tab_X(\kappa) \quad : Tab_X(\kappa) \longrightarrow \bigsqcup_{\nu \vdash n} Tab_X(\nu) \times Q_\nu(\kappa), \quad Q_\nu(\kappa) \subseteq ST(\nu)$$

- $$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-4} & 1 & 2 & 2 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \equiv w = 2331221111 \longrightarrow \left(P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 \\ \cline{1-3} 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, Q\right)$$

- (Hillman, Grassl 1980; White 1981) Seja κ um diagrama enviezado



Identificamos $Tab_X(\kappa)$ com o subconjunto de X^n das palavras no alfabeto X obtidas lendo os conteúdos de todos os tableaux $\in Tab_X(\kappa)$

$$F|Tab_X(\kappa) \quad : Tab_X(\kappa) \longrightarrow \bigsqcup_{\nu\vdash n} Tab_X(\nu) \times Q_\nu(\kappa), \quad Q_\nu(\kappa) \subseteq ST(\nu)$$

-

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-4} & 1 & 2 & 2 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \equiv w = 2331221111 \longrightarrow \left(P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3 \\ \cline{1-3} 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}, Q\right)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 \\ \cline{1-4} & 2 & 2 & 2 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \equiv w = 1332221111 \longrightarrow \left(P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3 \\ \cline{1-3} 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}, Q'\right)$$

$$|Tab^0(\kappa,\nu)| = |Q_\nu(\kappa)|.$$

A regra de Littlewood-Richardson

- (Kerov, 1984) $\kappa = \ydiagram{2,1+3,2+3}, \quad T = \begin{ytableau} 1 & 4 \\ \none & 2 & 3 & 3 \\ \none & \none & 1 & 2 & 2 \end{ytableau}, \quad m_T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4 \ldots$

$$s_\kappa = \sum_{T \in Tab(\kappa)} m_T$$

A regra de Littlewood-Richardson

- (Kerov, 1984) $\kappa = \ydiagram{2, 1+3, 2+3}$, $\quad T = \ytableaushort{14, \none233, \none\none122}$, $\quad m_T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4 \ldots$

$$s_\kappa = \sum_{T \in Tab(\kappa)} m_T$$

-

$$s_\nu = \sum_{T \in Tab(\nu)} m_T$$

A regra de Littlewood-Richardson

- (Kerov, 1984) $\kappa = \ydiagram{2, 1+3, 2+3}$, $\quad T = \begin{ytableau} 1 & 4 \\ \none & 2 & 3 & 3 \\ \none & \none & 1 & 2 & 2 \end{ytableau}$, $\quad m_T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4 \ldots$

$$s_\kappa = \sum_{T \in Tab(\kappa)} m_T$$

- $$s_\nu = \sum_{T \in Tab(\nu)} m_T$$

- $$s_\kappa = \sum_{T \in Tab(\kappa)} m_T = \sum_\nu |Q_\nu(\kappa)| \sum_{P \in Tab(\nu)} m_P = \sum_\nu |Q_\nu(\kappa)| s_\nu$$

A regra de Littlewood-Richardson

- (Kerov, 1984) $\kappa = \ydiagram{2,1+3,2+3}, \qquad T = \begin{ytableau} 1 & 4 \\ \none & 2 & 3 & 3 \\ \none & \none & 1 & 2 & 2 \end{ytableau}, \qquad m_T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4 \dots$

$$s_\kappa = \sum_{T \in Tab(\kappa)} m_T$$

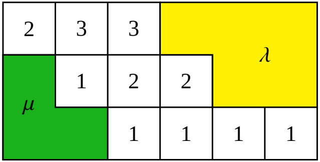
- $$s_\nu = \sum_{T \in Tab(\nu)} m_T$$

- $$s_\kappa = \sum_{T \in Tab(\kappa)} m_T = \sum_\nu |Q_\nu(\kappa)| \sum_{P \in Tab(\nu)} m_P = \sum_\nu |Q_\nu(\kappa)| s_\nu$$

- $\kappa = \lambda/\mu, \qquad c^\lambda_{\mu,\nu} := |Q_\nu(\kappa)| = |\,Tab^0(\lambda/\mu;\nu)|$

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^\lambda_{\mu,\nu} s_\nu$$

Littlewood-Richardson tableaux

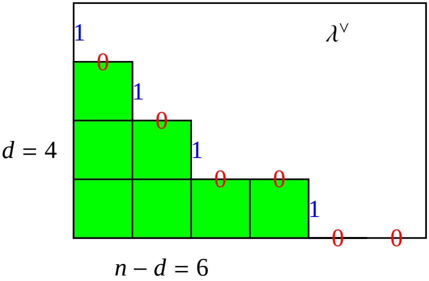


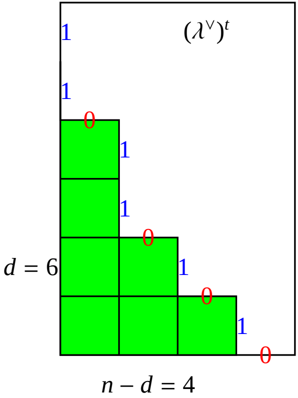
$\nu = (5, 3, 2)$

3-Puzzle de Knutson-Tao-Woodward

- Partições e sequências binárias

$n = 10$





$\lambda = (4, 2, 1, 0) \leftrightarrow$ 0010010101

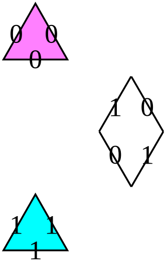
$\lambda^\vee = (6, 5, 4, 2) \leftrightarrow$ 1010100100

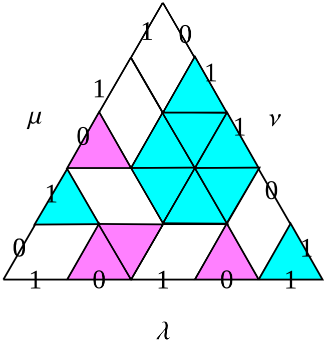
$\lambda^t = (3, 2, 1, 1, 0, 0)$ 0101011011

$(\lambda^\vee)^t = (4, 4, 3, 3, 2, 1)$ 1101101010

A regra do puzzle de Knutson-Tao-Woodward

- Um puzzle KTW de tamanho *n* é uma pavimentação dum triângulo de lado *n* com peças de lado 1 de três tipos tal que sempre que duas peças partilham uma aresta, as etiquetas (cores) das arestas são concordantes.
- As peças do puzzle podem ser rodadas em qualquer orientação *mas não reflectidas*.
- (Knutson-Tao-Woodward, 2004) $c_{\mu\,\nu\,\lambda}$ é o número de puzzles com μ, ν e λ no sentido dos ponteiros do relógio como 01-sequências na fronteira.





4. As $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias dos coeficientes de Littlewood-Richardson

- (Benkart-Sottile-Stroomer, 96) Os coeficientes de Littlewood-Richardson $c_{\mu\,\nu\,\lambda}$ são invariantes para a acção do grupo diedral $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$:
  - $\tau \in \mathbb{Z}_2 = \{0, \tau\}$ transpõe simultaneamente μ, ν e λ.
  - $\mathbb{S}_3 =< s_1, s_2 >$ permuta μ, ν. λ.

4. As $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias dos coeficientes de Littlewood-Richardson

- (Benkart-Sottile-Stroomer, 96) Os coeficientes de Littlewood-Richardson $c_{\mu\,\nu\,\lambda}$ são invariantes para a acção do grupo diedral $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$:
  - $\tau \in \mathbb{Z}_2 = \{0, \tau\}$ transpõe simultaneamente μ, ν e λ.
  - $\mathbb{S}_3 =< s_1, s_2 >$ permuta μ, ν. λ.
- $\mathbb{S}_3$-simetrias

$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda\,\mu\,\nu} = c_{\nu\,\lambda\,\mu}$$

$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\nu\,\mu\,\lambda}$$
$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\mu\,\lambda\,\nu}$$
$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda\,\nu\,\mu}$$

4. As $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias dos coeficientes de Littlewood-Richardson

- (Benkart-Sottile-Stroomer, 96) Os coeficientes de Littlewood-Richardson $c_{\mu\,\nu\,\lambda}$ são invariantes para a acção do grupo diedral $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$:
  - $\tau \in \mathbb{Z}_2 = \{0, \tau\}$ transpõe simultaneamente μ, ν e λ.
  - $\mathbb{S}_3 =< s_1, s_2 >$ permuta μ, ν. λ.
- $\mathbb{S}_3$-simetrias

$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda\,\mu\,\nu} = c_{\nu\,\lambda\,\mu} \qquad \begin{aligned} c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\nu\,\mu\,\lambda} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\mu\,\lambda\,\nu} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\lambda\,\nu\,\mu} \end{aligned}$$

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias

$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda\,\mu\,\nu} = c_{\nu\,\lambda\,\mu} \qquad \begin{aligned} c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\nu^t\,\mu^t\,\lambda^t} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\lambda^t\,\nu^t\,\mu^t} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\mu^t\,\lambda^t\,\nu^t} \end{aligned}$$

4. As $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias dos coeficientes de Littlewood-Richardson

- (Benkart-Sottile-Stroomer, 96) Os coeficientes de Littlewood-Richardson $c_{\mu\,\nu\,\lambda}$ são invariantes para a acção do grupo diedral $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$:
  - $\tau \in \mathbb{Z}_2 = \{0, \tau\}$ transpõe simultaneamente μ, ν e λ.
  - $\mathbb{S}_3 =< s_1, s_2 >$ permuta μ, ν. λ.
- $\mathbb{S}_3$-simetrias

$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda\,\mu\,\nu} = c_{\nu\,\lambda\,\mu} \qquad \begin{aligned} c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\nu\,\mu\,\lambda} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\mu\,\lambda\,\nu} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\lambda\,\nu\,\mu} \end{aligned}$$

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias

$$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda\,\mu\,\nu} = c_{\nu\,\lambda\,\mu} \qquad \begin{aligned} c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\nu^t\,\mu^t\,\lambda^t} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\lambda^t\,\nu^t\,\mu^t} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\mu^t\,\lambda^t\,\nu^t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\nu\,\mu\,\lambda} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\mu\,\lambda\,\nu} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\lambda\,\nu\,\mu} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\mu^t\,\nu^t\,\lambda^t} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\lambda^t\,\mu^t\,\nu^t} \\ c_{\mu\,\nu\,\lambda} &= c_{\nu^t\,\lambda^t\,\mu^t} \end{aligned}$$

I. Pak, E. Vallejo, Reductions of Young tableau bijections, SIAM J. Discrete Math., 2010

5. Um subgrupo de índice 2 das $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias fácil de exibir

- $\mathbf{H} =< \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2} >= \{\mathbf{1}, \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2 s_1 s_2}, \tau \mathbf{s_2}, \mathbf{s_1 s_2}, \mathbf{s_2 s_1}\}$ subgrupo de índice 2 de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$.

5. Um subgrupo de índice 2 das $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias fácil de exibir

- $\mathbf{H} =< \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2} >= \{\mathbf{1}, \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2 s_1 s_2}, \tau \mathbf{s_2}, \mathbf{s_1 s_2}, \mathbf{s_2 s_1}\}$ subgrupo de índice 2 de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$.
  - $\mathbf{H}\tau = \mathbf{H s_1} = \mathbf{H s_2} = \mathbf{H s_1 s_2 s_1} = \mathbf{H}\tau \mathbf{s_1 s_2} = \mathbf{H}\tau \mathbf{s_2 s_1}$

5. Um subgrupo de índice 2 das $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias fácil de exibir

- $\mathbf{H} =< \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2} >= \{\mathbf{1}, \tau\mathbf{s_1}, \tau\mathbf{s_2 s_1 s_2}, \tau\mathbf{s_2}, \mathbf{s_1 s_2}, \mathbf{s_2 s_1}\}$ subgrupo de índice 2 de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$.
  - $\mathbf{H}\tau = \mathbf{H s_1} = \mathbf{H s_2} = \mathbf{H s_1 s_2 s_1} = \mathbf{H}\tau\mathbf{s_1 s_2} = \mathbf{H}\tau\mathbf{s_2 s_1}$
- Acção do grupo **H** em LR tableaux
  - $\blacklozenge \leftrightarrow \tau s_1 s_2 s_1 = \tau s_2 s_1 s_2$

5. Um subgrupo de índice 2 das $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias fácil de exibir

- $\mathbf{H} =< \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2} >= \{\mathbf{1}, \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2 s_1 s_2}, \tau \mathbf{s_2}, \mathbf{s_1 s_2}, \mathbf{s_2 s_1}\}$ subgrupo de índice 2 de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$.
    - $\mathbf{H}\tau = \mathbf{H s_1} = \mathbf{H s_2} = \mathbf{H s_1 s_2 s_1} = \mathbf{H}\tau \mathbf{s_1 s_2} = \mathbf{H}\tau \mathbf{s_2 s_1}$
- Acção do grupo **H** em LR tableaux
    - $\blacklozenge \leftrightarrow \tau s_1 s_2 s_1 = \tau s_2 s_1 s_2$
    - $\spadesuit \leftrightarrow \tau s_1$

5. Um subgrupo de índice 2 das $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias fácil de exibir

- $\mathbf{H} =< \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2} >= \{\mathbf{1}, \tau \mathbf{s_1}, \tau \mathbf{s_2 s_1 s_2}, \tau \mathbf{s_2}, \mathbf{s_1 s_2}, \mathbf{s_2 s_1}\}$ subgrupo de índice 2 de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$.
  - $\mathbf{H}\tau = \mathbf{H s_1} = \mathbf{H s_2} = \mathbf{H s_1 s_2 s_1} = \mathbf{H}\tau \mathbf{s_1 s_2} = \mathbf{H}\tau \mathbf{s_2 s_1}$
- Acção do grupo **H** em LR tableaux
  - $\blacklozenge \leftrightarrow \tau s_1 s_2 s_1 = \tau s_2 s_1 s_2$
  - $\spadesuit \leftrightarrow \tau s_1$
  - $\clubsuit \leftrightarrow \tau s_2$,

5. Um subgrupo de índice 2 das $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$-simetrias fácil de exibir

- $\mathbf{H} =< \tau\mathbf{s_1}, \tau\mathbf{s_2} >= \{\mathbf{1}, \tau\mathbf{s_1}, \tau\mathbf{s_2 s_1 s_2}, \tau\mathbf{s_2}, \mathbf{s_1 s_2}, \mathbf{s_2 s_1}\}$ subgrupo de índice 2 de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$.
  - $\mathbf{H}\tau = \mathbf{H s_1} = \mathbf{H s_2} = \mathbf{H s_1 s_2 s_1} = \mathbf{H}\tau\mathbf{s_1 s_2} = \mathbf{H}\tau\mathbf{s_2 s_1}$
- Acção do grupo **H** em LR tableaux
  - $\blacklozenge \leftrightarrow \tau s_1 s_2 s_1 = \tau s_2 s_1 s_2$
  - $\spadesuit \leftrightarrow \tau s_1$
  - $\clubsuit \leftrightarrow \tau s_2$,

Theorem

(A., Conflitti, Mamede, 09)

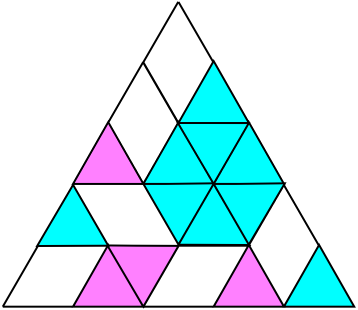
$$\{\mathbf{1}, \clubsuit, \blacklozenge, \clubsuit\blacklozenge, \blacklozenge\clubsuit, \clubsuit\blacklozenge\clubsuit = \blacklozenge\clubsuit\blacklozenge = \spadesuit\} =< \clubsuit, \blacklozenge >\simeq \mathbb{S}_3$$

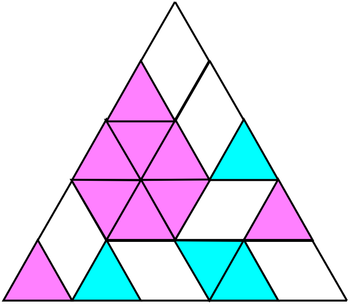
formam um subgrupo de índice 2, de custo linear, de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$. A comutatividade e a transposição são de custo linearmente redutível entre si.

KTW puzzle reflecções com troca de 0's 1's

- $c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\nu^t\,\mu^t\,\lambda^t}$ ♠
- $c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda^t\,\nu^t\,\mu^t}$ ♦
- $c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\mu^t\,\lambda^t\,\nu^t}$ ♣ = ♠♦♠ = ♦♠♦

♠

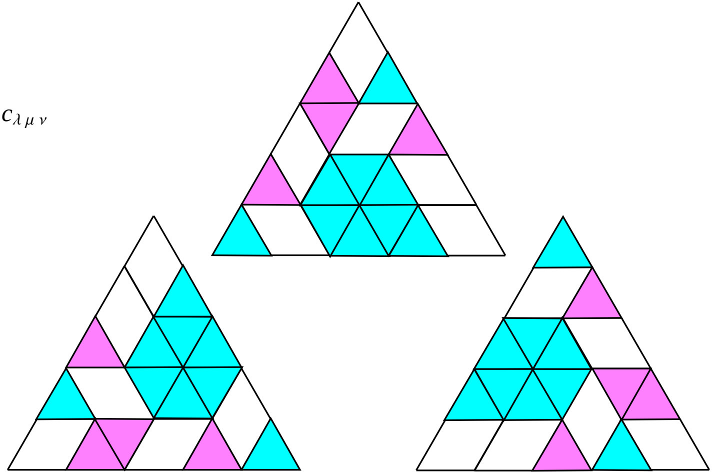




Puzzle $2\pi/3$–rotações

- $c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\lambda\,\mu\,\nu}$ ♣♦
- $c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\nu\,\lambda\,\mu}$ ♦♣

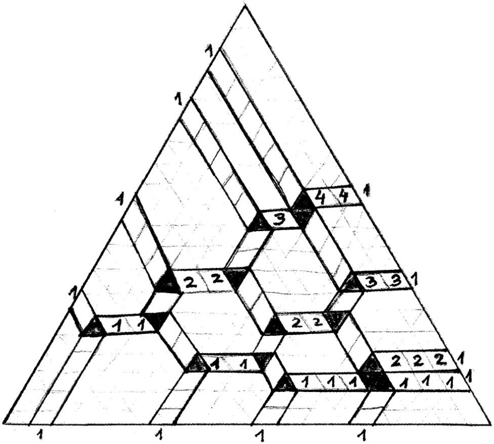
$c_{\mu\,\nu\,\lambda} = c_{\nu\,\lambda\,\mu} = c_{\lambda\,\mu\,\nu}$



Acção do subgrupo **H** em KTW-puzzles/LR-tableaux

- $$\begin{array}{c} < \text{KTW puzzle reflecções \& } 0 \leftrightarrow 1 > \\ \| \\ < \spadesuit, \blacklozenge > = \{\mathbf{1}, \clubsuit, \blacklozenge, \clubsuit\blacklozenge\clubsuit = \blacklozenge\clubsuit\blacklozenge, \clubsuit\blacklozenge, \blacklozenge\clubsuit\} \simeq S_3 \end{array}$$

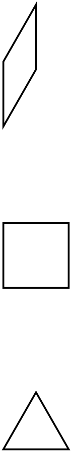
Bijecção de Tao entre KTW puzzles e LR tableaux

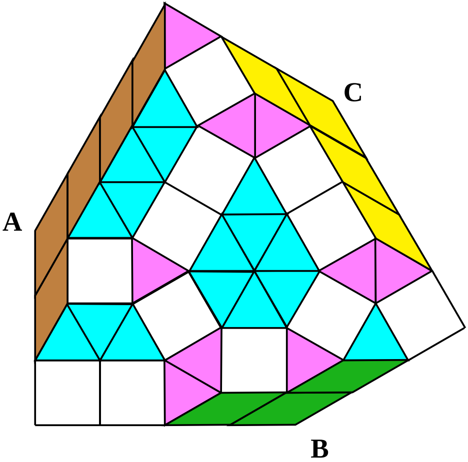


	1	1	2	2	3	4	4								
					1	1	2	2	3	3					
								1	1	1	2	2	2		
											1	1	1		

Purbhoo mosaicos (2008) estão em bijecção com KTW puzzles

Um *mosaico* é uma pavimentação de um hexágono, com comprimentos de lados e ângulos como abaixo, com triângulos unitários, quadrados unitários, e rombus unitários com ângulos de 30^o e 150^o estes últimos arrumados nos três cantos de 150^o.



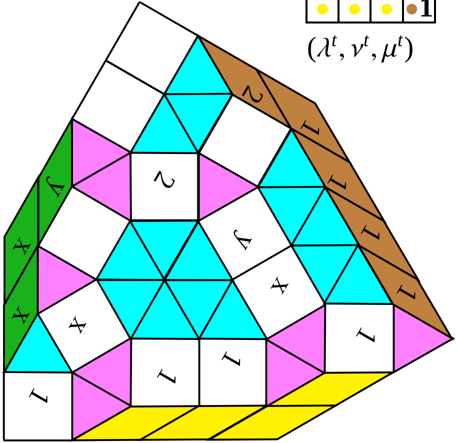


x		
	y	
	x	

(λ, μ, ν)

1	2		
	1	1	
			1

$(\lambda^t, \nu^t, \mu^t)$



Acção de $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ em LR-tableaux/KTW-puzzles

Theorem

(A.,Conflitti, Mamede,09)

$$\mathbb{Z}_2 \times S_3 =< \clubsuit, \blacklozenge, \rho : \rho^2 = \clubsuit^2 = \blacklozenge^2 = (\clubsuit\blacklozenge)^3 = (\clubsuit\rho)^2 = (\blacklozenge\rho)^2 = 1 >$$

$\rho = e\,\bullet$, $\qquad e =$ *involução de Schützenberger.*

References

- O. Azenhas, A. Conflitti, R. Mamede, *Linear time equivalent Littlewood-Richardson coefficient maps*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science Proceedings, AK, (2009) 127–144.
- Georgia Benkart, Frank Sottile, Jeffrey Stroomer. *Tableau switching: algorithms and applications*, J. Combin. Theory Ser. A 76 (1996), 11–34.
- A.P. Hillman and R.M. Grassl, *Skew-tableaux and the insertion algorithms*, J. Combin. Inform. System Sci. 5 (1980), 305–316.
- S. Kerov, *The Robinson - Schensted - Knuth correspondence and the Littlewood - Richardson rule*, Communications of the Moscow Mathematical Society, 1984
- D.E. Knuth, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific. J. Math. 34 (1980), 709–727.
- A. Knutson, T. Tao and C. Woodward. *The honeycomb model of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *tensor products. II: Puzzles determine facets of the Littlewood–Richardson cone*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), 19–48.
- Dudley E. Littlewood, Archibald R. Richardson. *Group characters and algebra*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 233 (1934), 99–142.

- I. Pak, E. Vallejo, *Combinatorics and geometry of Littlewood-Richardson cones*, Europ. J. Comb, (2005), 995–1008.
- I. Pak, E. Vallejo, *Reductions of Young tableau bijections*, SIAM J. Discrete Math., 24 (2010), no. 1, 113–145.
- Kevin Purbhoo. *Puzzles, tableaux, and mosaics*,J. Algebraic Combin., 28 (2008), 461–480.
- M. P. Schützenberger, *La Correspondence de Robinson*, in Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique. Lecture Notes in Mathematics, vol. 579, pp. 59-113. Springer, Berlin (1977).
- D.E. White, *Some connections between the Littlewood-Richardson rule and the construction of Schensted*, J. Combin. Theory Ser. A 30 (1981), 237–247.