IX OLIMPÍADA de MAIO
Primeiro nível
Maio de 2003

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

O Pedro escreveu todos os números de quatro algarismos diferentes que se podem formar com os dígitos a, b, c, d e que cumprem as seguintes condições:

$$a \neq 0, b = a + 2, c = b + 2, d = c + 2.$$

Calcula a soma de todos os números escritos pelo Pedro.

PROBLEMA 2

O triângulo $[ABC]$ é rectângulo em A e R é o ponto médio da hipotenusa $[BC]$. Sobre o cateto maior $[AB]$ marca-se o ponto P tal que $\overline{CP}=\overline{BP}$ e sobre o segmento $[BP]$ marca-se o ponto Q tal que o triângulo $[PQR]$ é equilátero. Se a área do triângulo $[ABC]$ é 27, calcula a área do triângulo $[PQR]$.

PROBLEMA 3

Determina o menor número inteiro que termina em 56, é múltiplo de 56 e a soma dos seus algarismos é igual a 56.

PROBLEMA 4

A Célia escolhe um número n e escreve a lista de todos os números inteiros de 1 até n:

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n-1, n.$$

Em cada passo, altera a lista: copia o primeiro número para o fim e apaga os dois primeiros. Depois de $n-1$ passos ficará escrito um único número. Por exemplo, para $n = 6$ os cinco passos são:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \longrightarrow 3, 4, 5, 6, 1 \longrightarrow 5, 6, 1, 3 \longrightarrow 1, 3, 5 \longrightarrow 5, 1 \longrightarrow 5$$

e fica escrito o número 5.

A Célia escolheu um número n entre 1000 e 3000 e depois de $n-1$ passos ficou escrito o número 1. Determina todos os valores de n que a Célia pode ter escolhido. Justifica porque é que esses valores servem e os outros não.

PROBLEMA 5

Num tabuleiro quadriculado 4×4, define-se *separação* entre duas casas como o menor número de movimentos que deve usar um cavalo de xadrez para ir de uma casa à outra (usando movimentos de cavalo). Três casas A, B e C formam um *bom trio* se as três separações entre A e B, entre A e C e entre B e C são iguais. Determina o número de bons trios que se formam no tabuleiro.

Nota: Em cada movimento o cavalo desloca-se 2 casas na direcção horizontal e uma casa na direcção vertical ou desloca-se duas casas na direcção vertical mais uma na direcção horizontal.