

**IX OLIMPÍADA de MAIO**  
**Segundo nível**  
**Maio de 2003**

Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

**PROBLEMA 1**

Escolhem-se quatro algarismos  $a, b, c, d$  distintos entre si e diferentes de zero e escreve-se a lista de todos os números de quatro algarismos que se podem obter trocando a posição dos algarismos  $a, b, c, d$ . Que algarismos devemos escolher para que a lista contenha o maior número possível de números de quatro algarismos que sejam múltiplos de 36?

**PROBLEMA 2**

Seja  $[ABCD]$  um rectângulo de lados  $\overline{AB} = 4$  e  $\overline{BC} = 3$ . A recta perpendicular à diagonal  $[BD]$  traçada por  $A$  intersecta  $[BD]$  no ponto  $H$ . Sejam  $M$  o ponto médio de  $[BH]$  e  $N$  o ponto médio de  $[CD]$ . Calcula o comprimento de  $[MN]$ .

**PROBLEMA 3**

Determina todos os pares de números inteiros  $(a, b)$  tais que  $8b + 1$  é múltiplo de  $a$  e  $8a + 1$  é múltiplo de  $b$ .

**PROBLEMA 4**

O Beto marcou 2003 pontos verdes no plano, de modo que todos os triângulos cujos três vértices são pontos verdes têm área inferior a 1.

Mostra que os 2003 pontos verdes estão contidos num triângulo  $T$  de área inferior a 4.

**PROBLEMA 5**

Uma formiga, que está numa aresta de um cubo de lado 8, tem de realizar um trajecto pela superfície do cubo e regressar ao ponto de partida. O seu caminho tem de conter pontos interiores das seis faces do cubo e a formiga deve visitar apenas uma vez cada uma das faces do cubo. Determina o comprimento do caminho mais curto que a formiga pode realizar e justifica porque é o caminho mais curto.