

X OLIMPIÁDA de MAIO
Segundo nível
Maio de 2004

Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

O João escreveu cinco números inteiros positivos, não necessariamente distintos, tais que o seu produto é igual à sua soma. Quais podem ter sido os números escritos pelo João?

PROBLEMA 2

A mãe do Pedrito quer preparar n pacotes de 3 caramelos para oferecer na festa de aniversário e, para isso, irá comprar caramelos sortidos de 3 sabores distintos. Ela pode comprar qualquer número de caramelos mas não pode escolher quantos são de cada sabor. Ela quer pôr em cada pacote um caramelo de cada sabor, e se isso não for possível usará só caramelos de um sabor e todos os pacotes terão 3 caramelos desse sabor. Determina o menor número de caramelos que deve comprar para poder formar os n pacotes. Explica porque razão se comprar menos caramelos não tem a certeza de poder formar os pacotes da maneira que quer.

PROBLEMA 3

Dispomos de uma mesa de bilhar de 8 metros de comprimento e 2 metros de largura, com uma única bola no seu centro. A bola é lançada em linha recta e, depois de percorrer 29 metros, pára numa esquina da mesa. Quantas vezes tocou a bola nos bordos da mesa?

Nota: Quando a bola toca num bordo da mesa e retorna os ângulos que a sua trajetória forma com os bordos da mesa são iguais.

PROBLEMA 4

Determina todos os números inteiros positivos x, y, z que verificam

$$x \cdot y \cdot z = 4104 \quad \text{e} \quad x + y + z = 77.$$

PROBLEMA 5

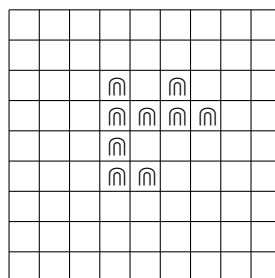
Sobre um tabuleiro 9×9 , dividido em quadrados 1×1 , colocam-se, sem sobreposições e sem sair do tabuleiro, peças da forma



Cada peça cobre exactamente três quadrados.

(a) A partir do tabuleiro vazio, quantas peças, no máximo, se podem colocar?

(b) A partir do tabuleiro com 3 peças já colocadas como mostra o diagrama seguinte,



quantas peças, no máximo, se podem colocar?