

X OLIMPÍADA de MAIO (2004)
Segundo nível
Soluções e critérios de pontuação

PROBLEMA 1

O João escreveu cinco números inteiros positivos, não necessariamente distintos, tais que o seu produto é igual à sua soma. Quais podem ter sido os números escritos pelo João?

Solução I

Sejam a, b, c, d, e os cinco inteiros positivos tais que a sua soma coincide com o seu produto, isto é, $a + b + c + d + e = abcde$, onde $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Dividindo por $abcde$ ambos os membros da igualdade anterior tem-se

$$\frac{1}{bcde} + \frac{1}{acde} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{abce} + \frac{1}{abcd} = 1.$$

Como e é o maior dos inteiros, cada fracção é menor ou igual a $\frac{1}{abcd}$ e portanto $abcd \leq 5$. Assim $a = b = 1$ e $c = 1$ ou $c = 2$. Se $c = 1$, tem-se $3 + d + e = de$. Deste modo $d \neq 1$. Se $d = 2$, tem-se $e = 5$; se pusermos $d = 3$, obtém-se $e = 3$. Como $e \geq d$, não se pode ter $d \geq 4$. Se $c = 2$, tem-se $2d \leq 5$, donde $d = 2$ e então $a + b + c + d + e = abcde$ implica que $e = 2$. Obtemos três soluções: $\{1, 1, 1, 2, 5\}$, $\{1, 1, 1, 3, 3\}$ e $\{1, 1, 2, 2, 2\}$.

Solução II

Sejam $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ os cinco inteiros tais que a sua soma coincide com o seu produto, ordenados do menor ao maior, tem-se

$$abcde = a + b + c + d + e. \quad (1)$$

Se $a \geq 2$, tem-se $abcde \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot e = 16e$ e $a + b + c + d + e \leq 5e$, e não se verifica a relação (1). Portanto $a = 1$.

Se $b \geq 2$, tem-se $abcde \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot e = 8e$ e $a + b + c + d + e \leq 1 + 4e$, e não se verifica a relação (1). Portanto $b = 1$.

Se $c \geq 2$, tem-se $abcde \geq 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot e = 4e$ e $a + b + c + d + e \leq 2 + 3e$, e então para que se verifique (1) é necessário que $4e \leq 2 + 3e$, isto é, $e \leq 2$. Como $2 \leq c \leq d \leq e \leq 2$, tem-se $c = d = e = 2$.

Se $c = 1$, devem procurar-se as soluções de $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d \cdot e = 1 + 1 + 1 + d + e$. Obtém-se $d \cdot e - d - e = 3$, que pode escrever-se na forma

$$(d - 1)(e - 1) = 4.$$

As soluções inteiras positivas desta equação, com $d \leq e$, são $d - 1 = 1$ e $e - 1 = 4$; $d - 1 = 2$ e $e - 1 = 2$, que correspondem a $d = 2$ e $e = 5$; $d = 3$ e $e = 3$.

Resumindo, há três soluções:

$$a = b = 1 \text{ e } c = d = e = 2; \quad a = b = c = 1 \text{ e } d = e = 3; \quad a = b = c = 1, d = 2 \text{ e } e = 5.$$

CrITÉRIOS de correcção:

Solução I

Ordena os 5 números	1 ponto
Divide por $abcde$	3 pontos
Obtém $abcd \leq 5$	3 pontos
Por cada uma das soluções correctas atribui-se 1 ponto até	3 pontos
TOTAL	10 pontos

Solução II

Ordena os 5 números de forma crescente ou decrescente		1 ponto
Demonstra que $a = 1$		2 pontos
Demonstra que $b = 1$		2 pontos
Demonstra que $c \leq 2$		2 pontos
Encontra a solução com $c = 2$		1 ponto
Encontra a solução com $c = 1$		2 pontos
TOTAL		10 pontos
<i>As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores</i>		
Por cada solução correcta, sem nenhuma explicação, atribui-se 1 ponto	até	3 pontos
Realiza algum estudo que não seja exaustivo	até	2 pontos
TOTAL	até	5 pontos

PROBLEMA 2

A mãe do Pedrito quer preparar n pacotes de 3 caramelos para oferecer na festa de aniversário e, para isso, irá comprar caramelos sortidos de 3 sabores distintos. Ela pode comprar qualquer número de caramelos mas não pode escolher quantos são de cada sabor. Ela quer pôr em cada pacote um caramelo de cada sabor, e se isso não for possível usará só caramelos de um sabor e todos os pacotes terão 3 caramelos desse sabor. Determina o menor número de caramelos que deve comprar para poder formar os n pacotes. Explica porque razão se comprar menos caramelos não tem a certeza de poder formar os pacotes da maneira que quer.

Solução

O menor número de caramelos é $7n - 2$.

Mostre-se que com $7n - 2$ podem formar-se os n pacotes, e que se se tiver no máximo $7n - 3$ caramelos talvez seja impossível formar os pacotes.

Tendo $7n - 2$ caramelos mas não podendo preparar pacotes de 3 sabores distintos é porque de pelo menos um dos sabores há $n - 1$ ou menos caramelos (não são suficientes para pôr um em cada pacote). Então pelo menos $7n - 2 - (n - 1) = 6n - 1$ caramelos são dos outros dois sabores. Nesse caso, de um desses 2 sabores há pelo menos $3n$ caramelos e podem formar-se os n pacotes com 3 caramelos desse sabor em cada um.

Veja-se uma situação possível com $7n - 3$ caramelos em que não é possível formar os pacotes. Tendo $n - 1$ caramelos de um sabor e $3n - 1$ de cada um dos outros dois sabores, no total há $n - 1 + 3n - 1 + 3n - 1 = 7n - 3$ caramelos. Não se podem formar n pacotes de 3 sabores em cada um (não há suficientes do primeiro sabor) nem se podem formar os n pacotes com 3 caramelos de um mesmo sabor porque não há $3n$ caramelos iguais.

Critérios de correcção:

Demonstra que com $7n - 2$ caramelos se podem formar n pacotes		6 pontos
Demonstra que tendo no máximo $7n - 3$, pode ser impossível formar os n pacotes		4 pontos
TOTAL		10 pontos
<i>As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores</i>		
Demonstra que, para $n = 2$, com 12 caramelos podem formar-se n pacotes		1 ponto
Demonstra que com 11 ou menos pode ser impossível formar os n pacotes		1 ponto
TOTAL		2 pontos
<i>As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores</i>		
Demonstra para 3 ou mais valores que com $7n - 2$ caramelos se podem formar n pacotes		3 pontos
Demonstra, para esses mesmos valores de n , que com no máximo $7n - 3$ pode ser impossível formar os n pacotes		2 pontos
TOTAL		5 pontos

PROBLEMA 3

Disponos de uma mesa de bilhar de 8 metros de comprimento e 2 metros de largura, com uma única bola no seu centro. A bola é lançada em linha recta e, depois de percorrer 29

metros, pára numa esquina da mesa. Quantas vezes tocou a bola nos bordos da mesa?

Nota: Quando a bola toca num bordo da mesa e retorna os ângulos que a sua trajectória forma com os bordos da mesa são iguais.

Solução I

Cada vez que a bola toca num lado da mesa, imagina-se outra mesa igual ao lado e que a bola passa à mesa adjacente. Assim, o movimento da bola é uma linha recta. Se a é o número de toques com o lado menor e b o número de toques com o lado maior, tem-se

$$\left[8 \left(a + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[2 \left(b + \frac{1}{2}\right)\right]^2 = 29^2$$

isto é,

$$(8a + 4)^2 + (2b + 1)^2 = 29^2. \quad (2)$$

Utilizando a forma geral dos trios pitagóricos que satisfazem $c^2 + d^2 = 29^2$, obtém-se $c = 8a + 4 = 20$ e $d = 2b + 1 = 21$. Logo, $a = 2$ e $b = 10$. A resposta é 12 vezes.

Ou também, desenvolvendo quadrados em (2)

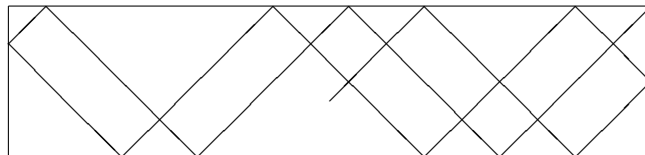
$$64a^2 + 64a + 16 + 4b^2 + 4b + 1 = 841$$

$$64a^2 + 64a + 4b^2 + 4b = 824$$

$$16a(a + 1) + b(b + 1) = 206.$$

Então, tem-se $a \leq 3$; a única solução possível é $a = 2$, $b = 10$.

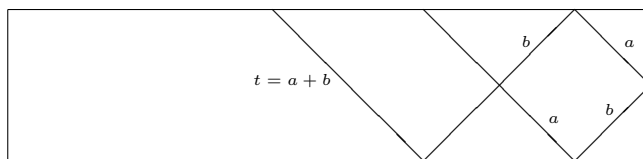
A seguinte figura representa a trajectória da bola.



Solução II

Se a trajectória da bola é simétrica em relação ao centro do rectângulo (mesa) pode pensar-se que a trajectória procurada é metade daquela que sai de uma esquina e finaliza na esquina oposta, de comprimento $2 \cdot 29 = 58$, e tem metade dos toques desta. Analisem-se dois casos. Se o primeiro toque ocorre num dos lados maiores (de 8 m) depois de percorrer um segmento de longitude t , entre dois toques consecutivos no lado maior percorre sempre um comprimento t , apesar de por vezes haver um toque intermédio no lado menor (de 2 m).

A bola vai e vem entre os lados menores, e depois de percorrer um número ímpar de vezes o comprimento da mesa, pára na esquina oposta à de saída (o número de comprimentos é ímpar e a esquina final é oposta à de saída em virtude da simetria da trajectória em relação ao centro).



Digamos que percorreu $2k + 1$ vezes o comprimento da mesa, e como consequência tocou $2k$ vezes no lado menor. Além disso, e novamente por simetria, o número de toques no lado maior é par, digamos $2j$, logo a bola percorreu $2j + 1$ troços de comprimento t . Tem-se

$$t = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8(2k + 1)}{2j + 1}\right)^2}$$

e o comprimento do caminho é

$$(2j + 1) \sqrt{2^2 + \left(\frac{8(2k + 1)}{2j + 1}\right)^2} = 58,$$

com $2k + 2j$ toques.

Fazendo os cálculos, tem-se $2^2(2j+1)^2 + (8(2k+1))^2 = 58^2$, isto é, $(2j+1)^2 + (8k+4)^2 = 29^2$.

Se o primeiro toque é num lado menor, com as mesmas notações do caso anterior, e sendo s o comprimento do caminho entre dois toques no lado menor, obtém-se $s = \sqrt{8^2 + \left(\frac{2(2j+1)}{2k+1}\right)^2}$ e $(2k+1)\sqrt{8^2 + \left(\frac{2(2j+1)}{2k+1}\right)^2} = 58$, donde, novamente $(8k+4)^2 + (2j+1)^2 = 29^2$.

Os possíveis valores de k são 0, 1, 2 e 3. Analisando um a um, o único admissível é $k = 2$ e, nesse caso, $j = 10$.

Determinou-se que a trajectória de 58 m tem $2k + 2j = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 10 = 24$ toques, e a de 29 m tem 12 toques (2 nos lados menores e 10 nos lados maiores).

Critérios de correcção:

Solução I

Identifica correctamente a trajectória na mesa com linhas paralelas a duas direcções	1 ponto
Considera a trajectória recta	2 pontos
Identifica correctamente a trajectória como a hipotenusa de um triângulo rectângulo	2 pontos
Relaciona os catetos do triângulo com o número de toques	3 pontos
Resolve a equação obtida	2 pontos
TOTAL	10 pontos

Solução II

Identifica correctamente a trajectória na mesa com linhas paralelas a duas direcções	1 ponto
Simetriza a trajectória	2 pontos
Define a constante t (ou a constante s)	2 pontos
Calcula o comprimento t (ou s) em função do número de toques	2 pontos
Estabelece a equação	1 ponto
Resolve essa equação	2 pontos
TOTAL	10 pontos

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores

Desenha algumas trajectórias usando exclusivamente linhas paralelas a duas direcções	1 ponto
Calcula os comprimentos de algumas trajectórias com 1, 2 ou 3 toques	2 pontos
TOTAL	até 3 pontos

PROBLEMA 4

Determina todos os números inteiros positivos x, y, z que verificam

$$x \cdot y \cdot z = 4104 \quad \text{e} \quad x + y + z = 77.$$

Solução I

Sejam $x \leq y \leq z$ os três números reais tais que

$$x \cdot y \cdot z = 4104$$

$$x + y + z = 77.$$

O maior dos três números, z , deve ser maior ou igual a $\frac{77}{3} = 26,666$, e menor ou igual a 75 (pois x e y são pelo menos 1).

Factorizando, $4104 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 19$.

Os possíveis valores de z são os divisores de 4104, entre 27 e 75, isto é:

$$3^3 = 27; 2^2 \cdot 3^2 = 36; 2 \cdot 19 = 38; 2 \cdot 3^3 = 54; 3 \cdot 19 = 57; 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Se $z = 27$,

$$x + y = 50$$

$$x \cdot y = 152,$$

então x e y devem ser ambos pares e menores que 27. Como $2 \cdot 19 = 38$, não há solução.

Se $z = 36$,

$$x + y = 41$$

$$x \cdot y = 114,$$

então x e y devem ser menores que 36. A única possibilidade é 6 e 19, que não somam 41.

Se $z = 38$,

$$x + y = 39$$

$$x \cdot y = 108,$$

então x e y devem ser menores que 38, um par e outro ímpar. Podem ser 4 e 27, 12 e 9 ou 36 e 3. A única que satisfaz $x + y = 39$ é $x = 3, y = 36$.

Se $z = 54$,

$$x + y = 23$$

$$x \cdot y = 76,$$

então x e y devem ser menores que 23, um par e outro ímpar. A única possibilidade é $x = 4, y = 19$, que são solução.

Se $z = 57$,

$$x + y = 20$$

$$x \cdot y = 72,$$

então x e y devem ser ambos pares e menores que 20; podem ser 4 e 18 ou 12 e 6. Nenhuma delas é solução.

Se $z = 72$,

$$x + y = 5$$

$$x \cdot y = 57,$$

que obviamente não tem solução.

Obtiveram-se as duas soluções seguintes (são todas):

$$x = 3, y = 36, z = 38; \quad x = 4, y = 19, z = 54.$$

Solução II

As decomposições de 4104 em três factores tais que o factor que tem o primo 19 seja menor que 77 são:

Com factor 19

			Soma
19	1	$2^3 \cdot 3^3 = 216$	236
19	2	$2^2 \cdot 3^3 = 108$	129
19	3	$2^3 \cdot 3^2 = 72$	94
19	2^2	$2 \cdot 3^3 = 54$	77
19	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	61
19	2^3	$3^3 = 27$	54
19	3^2	$2^3 \cdot 3 = 24$	52
19	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3^2 = 18$	49

Com factor $2 \cdot 19 = 38$

			Soma
38	1	$2^2 \cdot 3^3 = 108$	147
38	2	$2 \cdot 3^3 = 54$	94
38	3	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	77
38	2^2	$3^3 = 27$	69
38	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 3^2 = 18$	62
38	3^2	$2^2 \cdot 3 = 12$	59

Com factor $3 \cdot 19 = 57$

			Soma
57	1	$2^3 \cdot 3^2 = 72$	130
57	2	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	95
57	3	$2^3 \cdot 3 = 24$	84
57	2^2	$2 \cdot 3^2 = 18$	79
57	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3 = 12$	75
57	2^3	$3^2 = 9$	74

As restantes decomposições não interessam, pois terão um factor da forma $k \cdot 19$, com $k \geq 4$ e $k \cdot 19 \geq 4 \cdot 19 = 76$, logo não se verificará a condição de que os três números somem 77.

Os três números só poderão ser 4,19 e 54 ou 3,36 e 38.

Critérios de correcção:

Solução I

Factoriza 4104			1 ponto
Majora o maior dos números			2 pontos
Enumera os divisores de 4104 compreendidos entre as cotas determinadas			1 ponto
Para cada um destes valores de z analisa os possíveis valores de x e y	até		4 pontos
Por cada uma das soluções correctas atribui-se 1 ponto	até		2 pontos
TOTAL			10 pontos

Solução II

Factoriza 4104			1 ponto
Majora o inteiro que é múltiplo de 19 (19, 2.19 e 3.19)			3 pontos
Em cada caso analisa os possíveis valores para os outros dois inteiros	até		4 pontos
Por cada uma das soluções correctas atribui-se 1 ponto	até		2 pontos
TOTAL			10 pontos

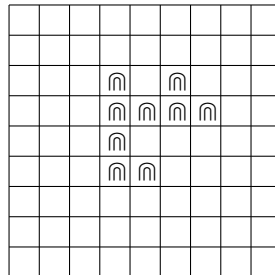
PROBLEMA 5

Sobre um tabuleiro 9×9 , dividido em quadrados 1×1 , colocam-se, sem sobreposições e sem sair do tabuleiro, peças da forma



Cada peça cobre exactamente três quadrados.

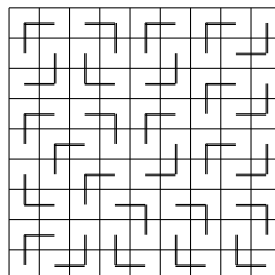
- (a) A partir do tabuleiro vazio, quantas peças, no máximo, se podem colocar?
 (b) A partir do tabuleiro com 3 peças já colocadas como mostra o diagrama seguinte,



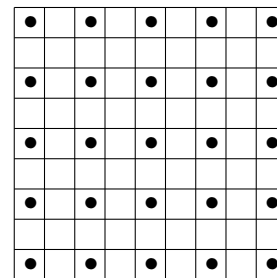
quantas peças, no máximo, se podem colocar?

Solução

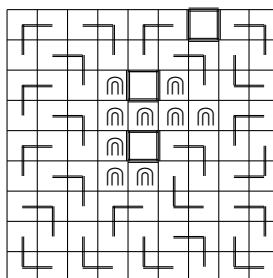
- (a) Podem colocar-se 27 peças que cubram completamente o tabuleiro:



8(b) Verifique-se primeiro que é impossível cobrir completamente o tabuleiro: Marcam-se 25 quadrados com um ponto (ver figura). Cada peça cobre um ou nenhum dos quadrados marcados. Para cobrir o tabuleiro usam-se $\frac{81}{3} = 27$ peças. As 3 peças já colocadas não cobrem nenhum dos quadrados marcados, então, com as restantes 24 será impossível cobrir os 25 quadrados que têm um ponto.



Portanto o número total de peças, contando com as 3 já colocadas, é menor ou igual a 26. No diagrama que se segue mostra-se uma maneira de juntar 23 peças às já colocadas, e no tabuleiro ficam 26 peças.



Critérios de correcção:

Solução

(a) Coloca bem as 27 peças	3 pontos
(b) Junta correctamente 23 peças	3 pontos
Demonstra que não é possível juntar 24 peças até	4 pontos
TOTAL	10 pontos