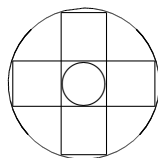


Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas

Cada questão vale 10 pontos.

1. Um relógio de ponteiros atrasa-se 30 segundos em cada hora. Sabendo que às 12 horas de hoje indica a hora exacta, em que dia voltará a estar certo? Solução
2. O Astérix e o seu companheiro Obélix estão a explorar um país muito pequeno no qual apenas existe uma estrada (em linha recta) que liga as três cidades que pretendem visitar: Amix, Berlix e Celtix. Ao chegarem à cidade de Amix avistam dois sinais com as seguintes indicações: “Berlix 5 km” e “Celtix 7 km”. Caminham mais alguns quilómetros e chegam à cidade de Berlix, onde, com grande espanto, o Obélix encontra dois sinais com as indicações: “Amix 4 km” e “Celtix 6 km”. Ao comentar com o Astérix o sucedido, este responde-lhe: “Não te preocupes! Sabe-se que numa das cidades todos os sinais têm indicações erradas, noutra todas as indicações são correctas e na outra uma indicação é correcta e a outra errada.” Por fim, ao chegarem à cidade de Celtix avistam mais dois sinais: “Amix 7 km” e “Berlix 3 km”. Quais são as verdadeiras distâncias entre as três cidades? Solução
3. O Alfredo encaixou 4 dados e 1 berlinde no fundo dum copo, com a seguinte disposição:

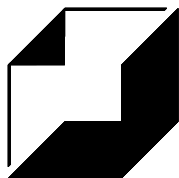


Mas agora, para recuperar o seu berlinde preferido o Alfredo tem de partir o copo e para que a sua mãe não descubra decide comprar outro copo igual. Sabendo que o raio do berlinde mede 1 cm, quanto mede o diâmetro da base do copo que o Alfredo tem que comprar? Solução

4. Um tabuleiro quadrado com 99 quadrículas de lado foi decorado com os símbolos \diamond , \clubsuit , \heartsuit e \spadesuit da forma indicada na figura. Qual foi o símbolo mais utilizado?

\diamond	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit	\diamond	\clubsuit	...	
\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit	\diamond	\clubsuit		...	
\heartsuit	\spadesuit	\diamond	\clubsuit			...	
\spadesuit	\diamond	\clubsuit				...	
\diamond	\clubsuit					...	
\clubsuit						...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
						...	

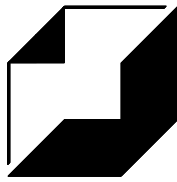
Solução



SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

1. Note-se em primeiro lugar que um relógio de ponteiros só volta a estar certo depois de se atrasar 12 horas, por isso basta determinar quanto tempo demora o relógio a atrasar-se 12 horas. Como o relógio se atrasa 30 segundos em cada hora, vai atrasar-se 12 minutos por dia, ou seja, vai demorar 5 dias a atrasar-se 1 hora, ou ainda, vai demorar 60 dias a atrasar-se 12 horas. Tendo em conta que o mês de Novembro tem 30 dias e o de Dezembro 31, conclui-se que o relógio voltará a estar certo no dia 13 de Janeiro de 2002 (às 12 horas).

[Enunciado da Prova](#)



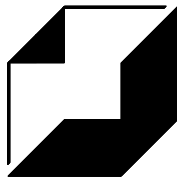
SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

-
2. Suponha-se que a distância entre Amix e Celtix não é 7 km . Então em cada uma destas cidades existiria pelo menos um sinal com indicação errada, logo seria Berlix a cidade contendo os dois sinais com indicações correctas. Mas nesse caso todos os sinais em Amix e Celtix teriam as indicações erradas, o que contraria o facto de apenas numa das três cidades ambos os sinais conterem indicações erradas. Logo, a distância entre Amix e Celtix é de 7 km , e é em Berlix que ambas as indicações estão erradas.

Agora, se em Celtix o sinal com a indicação “Berlix 3 km ” fosse correcto então a distância entre Amix e Berlix teria de ser 4 km (pois já vimos que a distância entre Amix e Celtix é de 7 km), o que não pode suceder, pois nesse caso a indicação “Amix 4 km ” em Berlix não estaria errada. Assim, terá de ser em Amix que se encontra o terceiro sinal com indicação correcta, nomeadamente “Berlix 5 km ”.

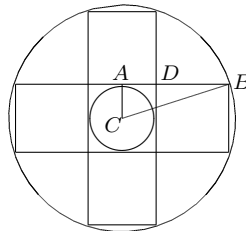
Conclui-se que a distância entre Amix e Berlix é de 5 km e que a distância entre Berlix e Celtix é de $7 - 5 = 2\text{ km}$.

[Enunciado da Prova](#)

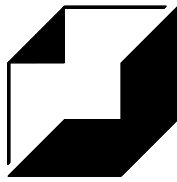


SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

3. Consideremos os pontos A , B e C como indicado na figura, onde C é o centro das circunferências e A o ponto de tangência da circunferência interior com um dos quadrados. O triângulo $[CAB]$ é rectângulo em A e aplicando o teorema de Pitágoras vem $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 1 + \overline{AB}^2$. Como $\overline{AD} = 1$ e $\overline{DB} = 2$ então $\overline{AB} = 3$ e $\overline{CB} = \sqrt{10}$. Portanto o Alfredo tem que comprar um copo cujo diâmetro da base seja $2\sqrt{10}$ cm.



Enunciado da Prova



SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

4. Como $99 = 24 \times 4 + 3$, ao retirarmos as 3 últimas linhas do tabuleiro, cada coluna fica exactamente com 24 conjuntos $\{\diamond, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Logo, nesta parte do tabuleiro (formada pelas primeiras 96 linhas) os símbolos \diamond , \clubsuit , \heartsuit e \spadesuit estão em igual número.

A primeira coluna do tabuleiro é constituída por 24 sequências iguais $(\diamond, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit)$ e uma sequência $(\diamond, \clubsuit, \heartsuit)$, por isso as 3 últimas linhas do tabuleiro têm os símbolos dispostos da forma seguinte:

\diamond	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit	\diamond	\clubsuit	\heartsuit	...	
\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit	\diamond	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit	...	
\heartsuit	\spadesuit	\diamond	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit	\diamond	...	

Por um raciocínio análogo ao utilizado para as primeiras 96 linhas, concluímos que, se retirarmos as 3 últimas colunas às linhas indicadas na figura anterior, os símbolos \diamond , \clubsuit , \heartsuit e \spadesuit ficam em igual número.

Por fim, analisemos o quadrado formado pelas 3 últimas colunas das 3 últimas linhas. Como a primeira das 3 últimas linhas também termina com a sequência $(\diamond, \clubsuit, \heartsuit)$ (exactamente como acontece com a primeira coluna do tabuleiro), o quadrado tem os símbolos dispostos da forma seguinte:

\diamond	\clubsuit	\heartsuit
\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit
\heartsuit	\spadesuit	\diamond

Neste quadrado o símbolo \heartsuit aparece mais uma vez do que qualquer um dos outros. Concluímos então que o símbolo \heartsuit é o mais utilizado.

[Enunciado da Prova](#)