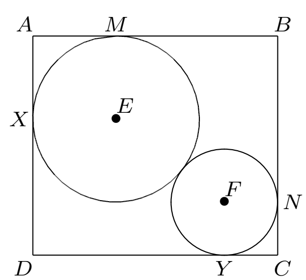
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

1. O António e a Catarina começaram a trabalhar no mesmo dia. O horário do António consiste em 3 dias de trabalho e depois um dia de descanso, enquanto que a Catarina trabalha 7 dias seguidos e descansa nos três dias seguintes. Quantos dias de descanso tiveram em comum nos primeiros 1000 dias? Solução

2. Na figura $\overline{AB} = 9$ e $\overline{AD} = 8$. As duas circunferências, tangentes entre si, têm centros E e F e são tangentes aos lados do rectângulo $[ABCD]$ nos pontos M, N, X e Y. Sabendo que o raio da circunferência de centro F mede 2, quanto mede o raio da circunferência de centro E? Solução



3. Numa conferência internacional participaram 241 jovens cientistas de 6 países diferentes. Dado o elevado número de participantes a organização decidiu alojá-los em 4 hotéis. Entre quaisquer 6 participantes existiam dois com a mesma idade. Mostra que num dos hotéis estavam alojados três cientistas do mesmo país e com a mesma idade. Solução

4. O calendário gregoriano tem 12 meses. Será que qualquer outro calendário para um ano comum (de 365 dias) constituído apenas por meses de 28, 30 ou 31 dias tem necessariamente 12 meses? Solução

---

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

1. O horário do António repete-se de 4 em 4 dias (3 dias de trabalho, T, mais um dia de descanso, D) e o da Catarina de 10 em 10 dias (7 dias T + 3 dias D). Como $m.m.c.(4, 10) = 20$ basta ver quantos dias de descanso têm em comum em 20 dias.

António	TTTDTTTDTTTDTTTDTTTD
Catarina	TTTTTTTDDDTTTTTTTDDD

Pela tabela verifica-se que em cada 20 dias há dois dias de descanso em comum. Assim nos primeiros 1000 ($= 50 \times 20$) dias tiveram $50 \times 2 = 100$ dias de descanso em comum.

Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

---

2. Sejam I o ponto de intersecção das rectas definidas por $[FN]$ e $[EM]$ e $r = \overline{EM} = \overline{XE}$ a medida do raio da circunferência de centro E.

   Sendo M e N pontos de tangência entre as circunferências e os lados do rectângulo, tem-se $[FN] \perp [BC]$ e $[ME] \perp [AB]$, pelo que $[FN] /\!/ [DC]$ e $[ME] /\!/ [AD]$. Assim

   $$\overline{IF} = \overline{DC} - \overline{FN} - \overline{EX} = 7 - r \quad \text{e} \quad \overline{IE} = \overline{AD} - \overline{EM} - \overline{FY} = 6 - r.$$

   Por outro lado, $\overline{EF} = r+2$ e o triângulo $[EFI]$ é rectângulo. Pelo Teorema de Pitágoras tem-se $\overline{IF}^2 + \overline{IE}^2 = \overline{EF}^2$, ou seja $(7-r)^2 + (6-r)^2 = (r+2)^2$.

   As soluções desta equação são $r = 3$ e $r = 27$, mas como $r < 8$ conclui-se que $r = 3$.

Enunciado da Prova

XX OPM - Categoria B ($10^{\underline{o}}$, $11^{\underline{o}}$, $12^{\underline{o}}$ **anos)**
$2^{\underline{a}}$ **Eliminatória**

16/1/02

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

---

3. A resolução consiste na aplicação sucessiva do chamado *Princípio de Dirichlet* (ou *Princípio do Pombal*).

   Se participaram na conferência 241 cientistas de 6 países então pelo menos 41 ($241 = 6 \times 40 + 1$) eram do mesmo país. Entre estes 41 participantes pelo menos 11 ($41 = 4 \times 10 + 1$) estavam no mesmo hotel. Se existissem mais do que 5 idades distintas então seria possível escolher 6 cientistas sem que dois deles tivessem a mesma idade. Assim conclui-se que pelo menos 3 ($11 = 5 \times 2 + 1$) cientistas eram do mesmo país, tinham a mesma idade e estavam alojados no mesmo hotel.

Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

4. **Solução 1:**Como o número 365 é ímpar, qualquer calendário tem pelo menos um mês de 31 dias. Os restantes 334 dias são agrupados em meses de 28, 30 ou 31 dias. Da desigualdade $\frac{334}{28} < 12$ conclui-se que, se todos esses meses tivessem 28 dias, o seu número seria inferior a 12. Por outro lado, a desigualdade $\frac{334}{31} > 10$ implica que, se todos os meses tivessem 31 dias, o seu número seria superior a 10. Portanto os 334 dias são obrigatoriamente agrupados em 11 meses.

   Conclui-se assim que qualquer calendário tem necessariamente 12 meses.

   Solução 2: Da desigualdade $\frac{365}{28} < 14$ conclui-se que, se existisse um calendário constituído por apenas meses de 28 dias, teria quando muito 13 meses. Por outro lado, a desigualdade $\frac{365}{31} > 11$ implica que um calendário só com meses de 31 dias teria pelo menos 12 meses. Portanto qualquer calendário (com meses de 28, 30 ou 31 dias) tem necessariamente 12 ou 13 meses.

   Da desigualdade $\frac{365-30}{28} < 12$ tem-se que um calendário com pelo menos um mês de 30 ou 31 dias possui obrigatoriamente 12 meses. Assim um calendário com 13 meses teria apenas meses de 28 dias, o que não é possível porque o número de dias do calendário (365) é ímpar.

   Conclui-se assim que qualquer calendário tem necessariamente 12 meses.

   Solução 3: Designando o número de meses de 28, 30 e 31 dias por x, y e z, respectivamente, as soluções em $\mathbb{N}_0$ da equação

$$28x + 30y + 31z = 365 \qquad (1)$$

   representam todos os calendários possíveis (nas condições do enunciado). A igualdade

$$28(x + y + z) + 2y + 3z = 365 \qquad (2)$$

   implica que $x + y + z \leq \frac{365}{28}$, logo $x + y + z \leq 13$. Por outro lado, da igualdade

$$31(x + y + z) - 3x - y = 365 \qquad (3)$$

   conclui-se que $x+y+z \geq \frac{365}{31}$, donde $x+y+z \geq 12$. Então $x+y+z = 12$ ou $x+y+z = 13$. Se fosse $x+y+z = 13$, da igualdade (2) obter-se-ia a equação $2y+3z = 1$ que não tem solução em $\mathbb{N}_0$. Portanto $x + y + z = 12$ e conclui-se assim que qualquer calendário tem necessariamente 12 meses.

   Como curiosidade apresentam-se todas as soluções em $\mathbb{N}_0$ da equação (1). Conjugando a equação (3) com a equação $x + y + z = 12$ tem-se que $3x + y = 7$, pelo que $0 \leq x \leq 2$. Atribuindo valores a x e resolvendo as equações $3x + y = 7$ e $2y + 3z = 1$ obtêm-se as seguintes soluções:

   - $x = 0$, $y = 7$ e $z = 5$;
   - $x = 1$, $y = 4$ e $z = 7$ (calendário gregoriano);
   - $x = 2$, $y = 1$ e $z = 9$.

Enunciado da Prova