OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/∼opm

XXI OPM - Categoria A (8º, 9º anos)
1ª Eliminatória

6/11/2002

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

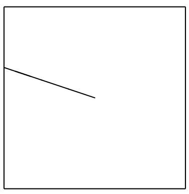
1. O produto dos algarismos do número 3115 é 15. Quantos números existem, entre 2002 e 9009, cujo produto dos seus algarismos é 15?

   Solução

2. Luke Skywalker e Han Solo defrontam-se numa corrida com as suas naves espaciais mais potentes. Luke dá cada volta à pista em 45 segundos e Han em 48 segundos. As naves espaciais de Luke e Han só se cruzam no momento em que Luke Skywalker termina a corrida. Quantas voltas tem a corrida?

   Solução

3. O João dividiu uma folha de papel quadrada, com 20 cm de lado, em 5 pedaços de igual área. O primeiro corte teve início no centro do quadrado e prolongou-se até à fronteira do papel a 7 cm de um canto, como indicado na figura seguinte.

   7
   

   Sabendo que o João fez todos os cortes em linha recta a partir do centro do quadrado, de que forma cortou o papel?

   Solução

4. O Luís vai participar nas Olimpíadas Portuguesas de Matemática e, como pretende ter uma boa classificação, elaborou o seguinte plano de preparação: nos primeiros dois dias resolver alguns exercícios e em cada um dos restantes dias resolver tantos exercícios quantos os resolvidos no total dos dois dias anteriores. Sabendo que o Luís cumpriu este plano de segunda a sábado e resolveu 16 exercícios no sábado, quantos resolveu em cada um dos restantes dias?

   Solução

XXI OPM - Categoria A (8º, 9º anos)
1ª Eliminatória

6/11/2002

SUGESTÕES para a resolução do problema.

1. Os números pretendidos têm necessariamente os algarismos 1, 1, 3 e 5. O algarismo dos milhares não pode ser 1, visto que os números estão entre 2002 e 9009. Assim, existem 2 possibilidades de escolha para o algarismo dos milhares (3 ou 5) e, escolhido esse algarismo, existem 3 posições diferentes para o outro algarismo diferente de 1, sendo as restantes posições ocupadas pelo algarismo 1. Portanto, existem $2 \times 3 = 6$ números entre 2002 e 9009 que têm o produto dos seus algarismos igual a 15.

SUGESTÕES para a resolução do problema.

2. **Solução 1:** Observe-se que Han termina a 1ª volta a 3 segundos de Luke, a 2ª volta a $2 \times 3 = 6$ segundos de Luke, a 3ª volta a $3 \times 3 = 9$ segundos de Luke e assim sucessivamente. Logo, Han termina a 15ª volta a $15 \times 3 = 45$ segundos de Luke, que acaba de percorrer 16 voltas. Portanto, Han e Luke cruzam-se pela primeira vez nesse momento. Mas, como Han e Luke só se cruzam quando Luke termina a corrida, esta tem exactamente 16 voltas.

   Solução 2: Observe-se que Han e Luke se cruzam pela primeira vez no momento em que ambos completam uma dada volta. Como m.m.c.$\{45, 48\} = 720$, esse momento ocorre ao fim de 720 segundos de corrida. Logo, Luke termina a corrida com o tempo de 720 segundos e a corrida tem exactamente $\frac{720}{45} = 16$ voltas.

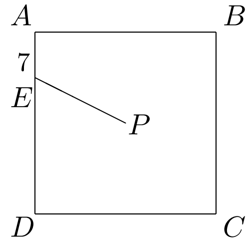
XXI OPM - Categoria A (8º, 9º anos)
1ª Eliminatória

6/11/2002

OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/∼opm

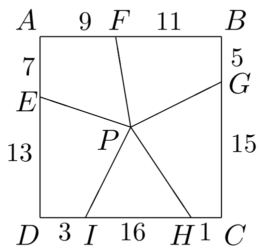
SUGESTÕES para a resolução do problema.

3. **Solução 1:** O quadrado [ABCD] indicado na figura seguinte representa a folha de papel e [EP] o primeiro corte feito pelo João.

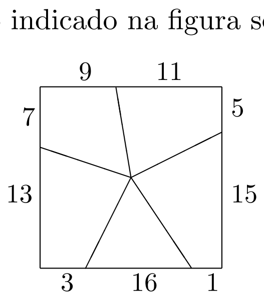


Dado que a área da folha de papel mede 400 cm^2, a medida da área de cada pedaço é 80 cm^2. Seja F o ponto em $[AB]$ tal que a área de $[AFPE]$ mede 80 cm^2. Visto que a área de $[APE]$ mede 35 cm^2, então, a medida da área de $[AFP]$ é $80-35=45$ cm^2 e, assim, $\dfrac{\overline{AF}\times 10}{2}=45$, ou seja, $\overline{AF}=9$ cm. A área de $[FBP]$ mede $\dfrac{(20-9)\times 10}{2}=55$ cm^2. Se G for o ponto em $[BC]$ tal que a medida da área de $[FBGP]$ é 80 cm^2, tem-se que a área de $[BGP]$ mede $80-55=25$ cm^2 e, por isso, $\dfrac{\overline{BG}\times 10}{2}=25$, ou seja, $\overline{BG}=5$ cm. Assim, a área de $[GCP]$ mede 75 cm^2. Se H for o ponto em $[DC]$ tal que a área de $[PGCH]$ mede 80 cm^2, tem-se $\dfrac{\overline{HC}\times 10}{2}=5$, ou seja, $\overline{HC}=1$ cm. Note-se que $\overline{DH}=20-1=19$ cm e a área de $[DPH]$ mede 95 cm^2. Seja I o ponto em $[DC]$ tal que $\dfrac{\overline{IH}\times 10}{2}=80$, ou seja, $\overline{IH}=16$ cm.

Os valores de $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{HC}$ e $\overline{IH}$ determinam completamente os segmentos $[PF]$, $[PG]$, $[PH]$ e $[PI]$ que representam os cortes efectuados pelo João, como se indica na figura seguinte.



Solução 2: Os 5 pedaços de papel obtidos pelo João são decomponíveis em triângulos de igual altura (10 cm), cujas bases estão contidas na fronteira do quadrado. Logo, a divisão do quadrado em 5 pedaços com a mesma área reduz-se à divisão do perímetro do quadrado em 5 partes iguais. Como o perímetro do quadrado é 80 cm, conclui-se que cada corte foi efectuado medindo na fronteira do quadrado $80:5=16$ cm a partir do corte anterior. Assim, o João cortou a folha de papel do modo indicado na figura seguinte.



XXI OPM - Categoria A ($8^{\underline{o}}$, $9^{\underline{o}}$ anos)
$1^{\underline{a}}$ Eliminatória

6/11/2002

SUGESTÕES para a resolução do problema.

---

4. **Solução 1:** Seja X o número de exercícios que o Luís resolveu na sexta. Como o número de exercícios que ele resolveu no sábado é igual à soma do número de exercícios resolvidos na quinta e na sexta, então, o Luís resolveu $16 - X$ exercícios na quinta. De igual modo se conclui que o Luís resolveu $2X - 16$ exercícios na quarta, $32 - 3X$ na terça e $5X - 48$ na segunda. Por outro lado, todos estes valores são números inteiros positivos e, portanto, $X = 10$. Assim, conclui-se que o Luís resolveu 2 exercícios na segunda, 2 na terça, 4 na quarta, 6 na quinta e 10 na sexta.

   Solução 2: Sejam S e T o número de exercícios que o Luís resolveu na segunda e na terça, respectivamente. Na quarta o Luís resolveu $S + T$ exercícios, na quinta $T + (S + T) = S + 2T$, na sexta $(S + T) + (S + 2T) = 2S + 3T$ e no sábado $(S + 2T) + (2S + 3T) = 3S + 5T$. Como S e T são inteiros positivos, a única solução da equação $3S + 5T = 16$ é $S = T = 2$. Assim, conclui-se que o Luís resolveu 2 exercícios na segunda, 2 na terça, 4 na quarta, 6 na quinta e 10 na sexta.