Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIII OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2005 - Categoria A - 8°/9°

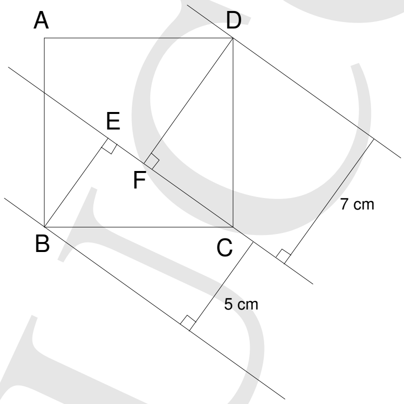
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Como $2005 = 4 + 400 \times 5 + 1$, o primeiro a jogar, o Artur, pode colocar 4 peças e, em seguida, coloque o Bernardo o que colocar, o Artur pode jogar de modo a que, na sua jogada e na anterior, se coloquem, no total, 5 peças. Ao fim de 400 pares de jogadas deste tipo, o Bernardo será obrigado a colocar a última peça, perdendo o jogo. Deste modo, a estratégia indicada garante a vitória ao Artur. Observe-se que esta é a única estratégia vencedora e independente da forma de jogar do Bernardo.

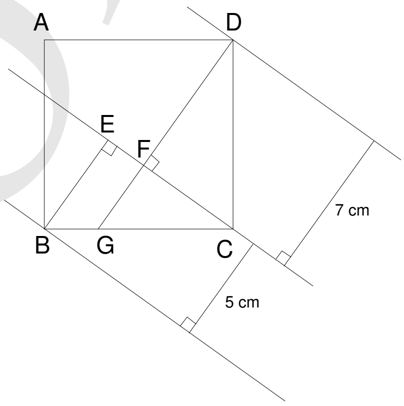
   Portanto, a afirmação é do Artur e esta a estratégia que planeou.

2. **Solução 1:** Uma vez que $\overline{DC} = \overline{BC}$, $C\widehat{D}F = B\widehat{C}E$ e $D\widehat{F}C = C\widehat{E}B$, os triângulos $[DFC]$ e $[CEB]$ são congruentes. Então $\overline{FC} = \overline{EB} = 5$ e, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[DFC]$, conclui-se que a área do quadrado $[ABCD]$ é $\overline{DC}^2 = 7^2 + 5^2 = 74$ cm^2.



Solução 2: Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[FGC]$ e $[DFC]$ obtém-se $\overline{GC}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{GF}^2$ e $\overline{DC}^2 = \overline{FC}^2 + 7^2$. Destas igualdades resulta que

$$\overline{DC}^2 = 49 + \overline{GC}^2 - \overline{GF}^2.$$



Uma vez que os triângulos $[FGC]$ e $[EBC]$ são semelhantes, $\frac{\overline{GC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{BE}}$, logo, $\overline{GC} = \frac{\overline{DC}\times\overline{GF}}{5}$ e

$$\overline{DC}^2 = 49 + \frac{\overline{DC}^2 \times \overline{GF}^2}{5^2} - \overline{GF}^2.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[DGC]$ obtém-se $(\overline{GF} + 7)^2 = \overline{DC}^2 + \overline{GC}^2$ e, como $\overline{GC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{GF}^2 - 49$, vem $(\overline{GF} + 7)^2 = 2\,\overline{DC}^2 - 49 + \overline{GF}^2$, ou seja, $\overline{GF} = \frac{\overline{DC}^2 - 49}{7}$.

Assim, $\overline{DC}^2 = 49 + \frac{\overline{DC}^2(\overline{DC}^2-49)^2}{35^2} - \frac{(\overline{DC}^2-49)^2}{49}$, ou ainda, $\frac{\overline{DC}^2(\overline{DC}^2-49)}{35^2} - \frac{\overline{DC}^2-49}{49} = 1$. Conclui-se que $\overline{DC}^2\,(\overline{DC}^2 - 74) = 0$ e, portanto, a área do quadrado $[ABCD]$ é $\overline{DC}^2 = 74$ cm^2.

3. Para que o fóssil do número seja ímpar, todos os seus algarismos têm de ser ímpares, pois o produto de um número par por um número qualquer é sempre um número par. Assim, só nos restam os algarismos $1, 3, 5, 7$ e 9 para construir o número pretendido.

   Por outro lado, como os algarismos têm de ser todos diferentes, o número terá, no máximo, 5 algarismos. Contudo, qualquer número com 5 algarismos ímpares e todos diferentes tem fóssil 0. De facto, o produto dos números $1, 3, 5, 7$ e 9 é 945 e o seu fóssil é 0.

   O maior número com 4 algarismos ímpares e todos diferentes é 9753, mas tem fóssil 0. O número que o antecede com os 4 algarismos ímpares e todos diferentes é 9751 e o seu fóssil é 5.

   Portanto, o maior número com os algarismos todos diferentes, cujo fóssil é ímpar, é 9751.

4. Há $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ formas possíveis de percorrer as 7 cidades, visitando cada uma exactamente uma vez. A cada percurso em que C é visitada antes de D corresponde um outro em que D é visitada antes de C, basta para isso trocar C com D. Logo, em metade dos percursos C é visitada antes de D, pelo que há $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{2}$ formas de visitar as 7 cidades em que C é visitada antes de D. Pelo mesmo raciocínio, conclui-se que em metade destes $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{2}$ percursos F é visitada antes de G. Assim, existem exactamente $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{4} = 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 1260$ trajectos possíveis.