Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIII OPM - Final - 1º dia - 18.03.2005 - Categoria A

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Escrevendo mais alguns algarismos da lista

$$8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, 8, 6, \dots$$

observa-se que o $21^{\underline{o}}$ e o $22^{\underline{o}}$ algarismos coincidem com o $1^{\underline{o}}$ e o $2^{\underline{o}}$, respectivamente. Sendo assim, os algarismos repetem-se em ciclos de 20. Uma vez que $2005 = 20 \times 100 + 5$, o último algarismo da lista é igual ao $5^{\underline{o}}$, ou seja, é 4.

Opção correcta: C).

(b) A área da região sombreada é a terça parte da área do quadrado, logo é igual a $\frac{1}{3} \times 6^2 = 12$. Por outro lado, esta área é igual à soma das áreas dos triângulos $[AEF]$ e $[ECF]$. Cada um destes triângulos tem base $[EF]$ e a soma das suas alturas é 6. Deste modo, a soma das suas áreas é $\dfrac{\overline{EF} \times 6}{2} = 3\,\overline{EF}$. Portanto, tem-se $3\,\overline{EF} = 12$, ou seja, $\overline{EF} = 4$ cm.

Opção correcta: C).

(c) Observe-se que o número de pessoas que irão conhecer a anedota será máximo se a anedota não for contada a ninguém que já a conheça. Nesse caso, em cada dia o número de novas pessoas que ficam a conhecer a anedota é a soma do número de pessoas que conheceram a anedota no dia anterior com o dobro do número de pessoas que conheceram a anedota dois dias antes. Ontem, só eu conhecia a anedota, hoje (dia 1) uma nova pessoa vai conhecê-la e amanhã (dia 2) serão (usando a regra indicada) $1 + 2 \times 1 = 3$ novas pessoas. Constrói-se a tabela:

Ontem	1
Hoje/ Dia 1	1
Dia 2	$1 + 2 \times 1 = 3$
Dia 3	$3 + 2 \times 1 = 5$
Dia 4	$5 + 2 \times 3 = 11$
Dia 5	$11 + 2 \times 5 = 21$
Dia 6	$21 + 2 \times 11 = 43$
Dia 7	$43 + 2 \times 21 = 85$

O número máximo de pessoas que conhecerão a anedota é $1 + 1 + 3 + 5 + 11 + 21 + 43 + 85 = 170$.

Opção correcta: E).

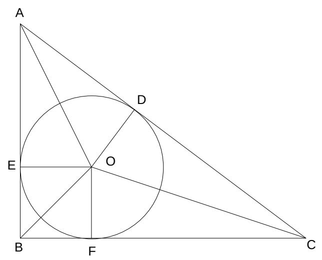
(d) Se tivessem faltado 9 alunos os três dias, então teriam faltado mais $15 - 9 = 6$ alunos, na segunda, e mais $12 - 9 = 3$ alunos, na terça. Assim, nos três dias teriam faltado, em algum dos dias, no máximo, $9 + 6 + 3 = 18$ alunos, o que não está de acordo com as hipóteses.

Se tivessem faltado 8 alunos os três dias, então teriam faltado mais $15 - 8 = 7$ alunos, na segunda, mais $12 - 8 = 4$ alunos, na terça, e mais $9 - 8 = 1$ aluno, na quarta. Assim, nos três dias teriam faltado, em algum dos dias, no máximo, $8 + 7 + 4 + 1 = 20$ alunos, o que não está de acordo com as hipóteses.

Se tivessem faltado 7 alunos os três dias, então teriam faltado mais $15 - 7 = 8$ alunos, na segunda, mais $12 - 7 = 5$ alunos, na terça, e mais $9 - 7 = 2$ alunos, na quarta. Assim, nos três dias teriam faltado, em algum dos dias, no máximo, $7 + 8 + 5 + 2 = 22$ alunos. Supondo que 7 alunos faltaram os três dias e que os restantes só faltaram num dia, cumprem-se as hipóteses.

Opção correcta: C).

2. Considere-se um triângulo rectângulo $[ABC]$ nas condições do enunciado. Designe-se por O o centro do círculo nele inscrito e por D, E e F os pontos em que o círculo toca os lados $[AC]$, $[AB]$ e $[BC]$, respectivamente. Denote-se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ por a, b e c, respectivamente, e o comprimento do raio do círculo por r. Suponha-se que $a \geq b$.



Sabe-se que $\frac{ab}{2} = 6$, ou seja, $ab = 12 = 2^2 \times 3$. Da igualdade $a^2 + b^2 = c^2$, obtida por aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ABC]$, e uma vez que a, b e c são números inteiros, conclui-se que $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$.

Solução 1: Por um lado, $\overline{AE} = 4 - r$ e $\overline{FC} = 3 - r$. Por outro lado, os triângulos rectângulos $[AEO]$ e $[ADO]$ são congruentes, bem como os triângulos rectângulos $[OFC]$ e $[ODC]$, pelo que $\overline{AD} = \overline{AE} = 4 - r$ e $\overline{DC} = \overline{FC} = 3 - r$. Assim, $5 = 4 - r + 3 - r$, ou seja, $r = 1$.

Solução 2: A área do triângulo $[ABC]$ corresponde à soma das áreas dos triângulos $[ABO]$, $[BCO]$ e $[AOC]$, pelo que se obtém $\frac{4r}{2} + \frac{3r}{2} + \frac{5r}{2} = 6$, ou seja, $r = 1$.
Portanto, o comprimento do raio do círculo é 1 cm.

3. Numerem-se as pessoas da fila de 1 a 2005.

Solução 1: Após cada uma das pessoas ter gritado uma vez, não foram eliminados os números que têm resto 1 quando divididos por 3. Assim, restaram os 669 números da forma $3k_1 + 1$, $k_1 = 0, 1, \ldots, 668$, ou seja, 1, $4, 7, 10, 13, 16, \ldots, 2002, 2005$. Observe-se que estes números podem ser representados pelo índice k_1, que começa em zero. Logo, destes 669 números não foram eliminados os 223 números da forma $3k_1 + 1$, com $k_1 = 3k_2$ e $k_2 = 0, \ldots, 222$. Uma vez que $222 = 3 \times 74$, $74 = 3 \times 24 + 2$, $24 = 3 \times 8$ e $8 = 3 \times 2 + 2$, conclui-se que, após cinco repetições do processo, não foram eliminados os três números da forma $3k_1 + 1$, com $k_1 = 3k_2$, $k_2 = 3k_3$, $k_3 = 3k_4$, $k_4 = 3k_5$, $k_5 = 3k_6$ e $k_6 = 0, 1$ e 2.

Assim, as pessoas que ganharam as entradas estavam inicialmente nas posições $3^6 k_6 + 1$, para $k_6 = 0, 1$ e 2, ou seja, 1, 730 e 1459.

Solução 2: Após cada uma das pessoas ter gritado uma vez, a diferença entre os números de pessoas consecutivas na nova fila é constante e igual a 3. Em cada passo do processo a diferença entre os números de pessoas consecutivas é o triplo da diferença no passo anterior. Após n passos a diferença entre os números é 3^n e, como o número 1 é sempre escolhido, os números das pessoas que não foram eliminados são $1, 3^n + 1, 2 \times 3^n + 1, 3 \times 3^n + 1, \cdots$. No último passo, $2 \times 3^n + 1 \leq 2005$ e $3 \times 3^n + 1 > 2005$, ou seja, $n = 6$. As pessoas que ganharam estavam inicialmente nas posições 1, $3^6 + 1$ e $2 \times 3^6 + 1$, ou seja, 1, 730 e 1459.