



# Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIII OPM - Final - 1º dia - 18.03.2005 - Categoria B

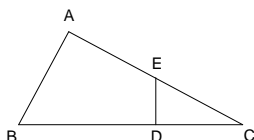
<http://www.spm.pt/~opm>

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.*

1. Numa fila para um concerto do Super Rock Pop estavam 2005 pessoas. Com o objectivo de oferecer 3 entradas para o "backstage", pediu-se à primeira pessoa da fila que gritasse "Super", à segunda "Rock", à terceira "Pop", à quarta "Super", à quinta "Rock", à sexta "Pop" e assim sucessivamente. Quem disse "Rock" ou "Pop" foi eliminado. Repetiu-se este processo, sempre a partir da primeira pessoa da nova fila, até restarem apenas 3 pessoas. Em que posições se encontravam no início essas pessoas?
2. Considera os triângulos  $[ABC]$  e  $[EDC]$ , rectângulos em  $A$  e  $D$ , respectivamente. Mostra que, se  $E$  é o ponto médio de  $[AC]$ , então  $\overline{AB} < \overline{BD}$ .



3. Num tabuleiro com  $a$  linhas e  $b$  colunas, cada casa tem um interruptor e uma lâmpada apagada. Premindo o interruptor de uma casa, a lâmpada que se encontra nessa casa muda de estado, juntamente com as lâmpadas que se encontram na mesma linha e com as que se encontram na mesma coluna (as que se encontram acesas apagam-se e as que se encontram apagadas acendem-se). Para que valores de  $a$  e  $b$  é possível ficar apenas com uma lâmpada acesa, premindo uma série de interruptores?