Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIII OPM - Final - 1º dia - 18.03.2005 - Categoria B

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

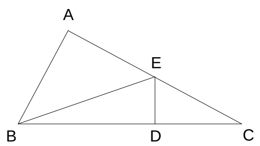
1. Numerem-se as pessoas da fila de 1 a 2005.

Solução 1: Após cada uma das pessoas ter gritado uma vez, não foram eliminados os números que têm resto 1 quando divididos por 3. Assim, restaram os 669 números da forma $3k_1+1$, $k_1 = 0, 1, \ldots, 668$, ou seja, 1, 4, 7, 10, 13, 16, $\ldots$, 2002, 2005. Observe-se que estes números podem ser representados pelo índice k_1, que começa em zero. Logo, destes 669 números não foram eliminados os 223 números da forma $3k_1+1$, com $k_1 = 3k_2$ e $k_2 = 0, \ldots, 222$. Uma vez que $222 = 3 \times 74$, $74 = 3 \times 24 + 2$, $24 = 3 \times 8$ e $8 = 3 \times 2 + 2$, conclui-se que, após cinco repetições do processo, não foram eliminados os três números da forma $3k_1+1$, com $k_1 = 3k_2$, $k_2 = 3k_3$, $k_3 = 3k_4$, $k_4 = 3k_5$, $k_5 = 3k_6$ e $k_6 = 0, 1$ e 2.

Assim, as pessoas que ganharam as entradas estavam inicialmente nas posições 3^6k_6+1, para $k_6 = 0, 1$ e 2, ou seja, 1, 730 e 1459.

Solução 2: Após cada uma das pessoas ter gritado uma vez, a diferença entre os números de pessoas consecutivas na nova fila é constante e igual a 3. Em cada passo do processo a diferença entre os números de pessoas consecutivas é o triplo da diferença no passo anterior. Após n passos a diferença entre os números é 3^n e, como o número 1 é sempre escolhido, os números das pessoas que não foram eliminados são $1, 3^n+1, 2\times 3^n+1, 3\times 3^n+1, \cdots$. No último passo, $2\times 3^n+1 \leq 2005$ e $3\times 3^n+1 > 2005$, ou seja, $n=6$. As pessoas que ganharam estavam inicialmente nas posições 1, 3^6+1 e $2\times 3^6+1$, ou seja, 1, 730 e 1459.

2. **Solução 1:** Conjugando as igualdades $\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{ED}^2$ e $\overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2$, obtidas por aplicação do Teorema de Pitágoras aos triângulos rectângulos $[BDE]$ e $[ABE]$, conclui-se que $\overline{BD}^2+\overline{ED}^2 = \overline{AE}^2+\overline{AB}^2$.

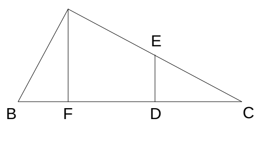


Logo, e uma vez que $\overline{AE} = \overline{EC}$, obtém-se a igualdade $\overline{BD}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AB}^2$.

Aplicando agora o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[EDC]$, conclui-se que $\overline{EC}^2 > \overline{ED}^2$.

Assim, $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{ED}^2 - \overline{EC}^2 < 0$, pelo que $\overline{AB}^2 < \overline{BD}^2$, ou seja, $\overline{AB} < \overline{BD}$.

Solução 2: Sejam x, y e w os comprimentos de $[BF]$, $[FC]$ e $[AF]$, respectivamente.



Conjugando as iguadades $\overline{AB}^2 = x^2 + w^2$ e $\overline{AC}^2 = y^2 + w^2$, obtidas por aplicação do Teorema de Pitágoras aos triângulos rectângulos $[ABF]$ e $[AFC]$, tem-se $\overline{AC}^2 = y^2 + \overline{AB}^2 - x^2$. Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ABC]$, obtém-se $(x+y)^2 = \overline{AB}^2 + y^2 + \overline{AB}^2 - x^2$.

Assim,

$$\overline{AB}^2 = x^2 + xy < x^2 + xy + \frac{y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2,$$

pelo que $\overline{AB} < x + \dfrac{y}{2}$. Como os triângulos $[AFC]$ e $[EDC]$ são semelhantes e E é o ponto médio de $[AC]$, tem-se que D é o ponto médio de $[FC]$. Assim, conclui-se que $\overline{BD} = x + \dfrac{y}{2} > \overline{AB}$.

Solução 3: Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ABC]$, obtém-se

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = (\overline{BD} + \overline{DC})^2 - 4\overline{EC}^2.$$

Mas $[ABC]$ e $[DEC]$ são semelhantes, logo,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{2\overline{EC}}{\overline{DC}},$$

ou seja, $2\overline{EC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DC} = (\overline{BD} + \overline{DC}) \times \overline{DC}$. Assim, tem-se $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2$ e, portanto, $\overline{AB} < \overline{BD}$.

3. Ao premir um interruptor há $a+b-1$ lâmpadas que mudam de estado. Se $a+b$ for ímpar, então $a+b-1$ é par, pelo que em cada passo o tabuleiro contém um número par de lâmpadas acesas e nunca se pode ficar com uma única lâmpada acesa. Restam assim dois casos a analisar: o caso em que a e b são ambos pares e o caso em que a e b são ambos ímpares.

   - a e b são pares

     Para acender apenas uma dada lâmpada basta premir todos os interruptores que estão na mesma linha e todos os que estão na mesma coluna dessa lâmpada. Essa lâmpada muda de estado $a+b-1$ vezes portanto no final fica acesa (uma vez que $a+b-1$ é ímpar). As lâmpadas que estão na mesma linha mudam de estado b vezes, logo no final ficam apagadas (b é par). Do mesmo modo, as lâmpadas que estão na mesma coluna ficam apagadas (a é par). As restantes lâmpadas mudam de estado duas vezes logo ficam também apagadas.

   - a e b são ímpares

     Solução 1:

     Observe-se que o número de mudanças de estado por linha ou por coluna é: a ou 1 nas linhas, porque pode mudar a linha toda ou uma só lâmpada; e b ou 1 nas colunas pelo mesmo motivo. Assim, o número de mudanças de estado por linha (ou por coluna) é sempre ímpar, logo a paridade do número de lâmpadas acesas por linha (e por coluna) é igual em todas as linhas (e em todas as colunas).

     Portanto, não é possível que apenas a lâmpada de uma casa fique acesa e todas as restantes fiquem apagadas.

     (Esta solução foi apresentada por João Leitão Guerreiro, aluno do $10^{\underline{o}}$ ano do Colégio Valsassina, premiado com uma Medalha de Ouro pela Categoria B.)

     Solução 2: Neste caso, não é possível ficar apenas com uma lâmpada acesa excepto no caso trivial $a = b = 1$. No esquema seguinte (desenhado para $a = 3$, $b = 5$), assinalaram-se com cruzes as primeiras $b-1$ casas da primeira linha, com círculos as últimas $a-1$ casas da última coluna, e com pontos $(a-1)(b-1)$ casas formando um rectângulo.

×	×	×	×	
•	•	•	•	○
•	•	•	•	○

Designem-se por x, y e z o número de vezes que se prime um interruptor na primeira linha, na última coluna e nas casas $\bullet$, respectivamente, ao fim de um certo número de passos.

A pressão de um interruptor na primeira linha contribui para a mudança de estado de cada uma das $b-1$ casas $\times$. A pressão de um interruptor na última coluna contribui para a mudança de estado de cada uma das $a-1$ casas $\bigcirc$. Finalmente, a pressão de um interruptor numa casa $\bullet$ contribui para a mudança de estado de uma casa $\times$ e de uma casa $\bigcirc$.

Assim, as casas $\times$ mudam de estado (no total) $(b-1)x+z$ vezes e as casas $\bigcirc$ mudam de estado $(a-1)y+z$ vezes. Como $a-1$ e $b-1$ são números pares, os números $(b-1)x+z$ e $(a-1)y+z$ têm a mesma paridade. Logo o número de lâmpadas $\times$ acesas tem a mesma paridade que o número de lâmpadas $\bigcirc$ acesas. Assim, não é possível que, por exemplo, a lâmpada da primeira casa $\times$ fique acesa e todas as restantes casas do tabuleiro fiquem apagadas. Um raciocínio semelhante mostra que tal também não é possível para nenhuma das lâmpadas do tabuleiro.

Logo, só é possível ficar com uma única lâmpada acesa para a e b pares, ou $a=b=1$.