

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIII OPM - Final - 2º dia - 19.03.2005 - Categoria A

<http://www.spm.pt/~opm>

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Designe-se por a a idade do noivo e por b a idade do pai da Junosga, no dia do casamento. A lei do planeta Pitagórico garante que $33^2 + a^2 = b^2$, ou seja,

$$b^2 - a^2 = 33^2.$$

Factorizando 33 em números primos, vem $33 = 3 \times 11$ e a igualdade acima escreve-se na forma

$$(b - a)(b + a) = 3^2 \times 11^2.$$

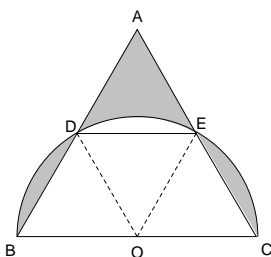
Solução 1: Como $b > 500$, também $b + a > 500$ e, conseqüentemente, $b + a = 3^2 \times 11^2 = 1089$ e $b - a = 1$. Portanto, $a = 544$ e $b = 545$. O noivo da Junosga tinha 544 anos.

Solução 2: Na tabela seguinte estão indicadas as quatro soluções inteiras positivas da equação anterior.

$b + a$	$b - a$	b	a
$3^2 \times 11^2$	1	545	544
3×11^2	3	183	180
11^2	3^2	65	56
$3^2 \times 11$	11	55	44

Como o pai da Junosga tinha mais do que 500 anos, conclui-se que ele tinha 545 anos e que o noivo da Junosga tinha 544 anos.

5. Sejam D e E os pontos de intersecção do semicírculo com os lados do triângulo e O o centro do semicírculo, como se indica na figura.



Como $\overline{BO} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = 1$ e $\widehat{DBO} = \widehat{OCE} = 60^\circ$, tem-se que $\widehat{ODB} = \widehat{CEO} = 60^\circ$ e que os triângulos $[DBO]$ e $[EOC]$ são equiláteros e congruentes. Logo, $\widehat{DOE} = 60^\circ$ e os triângulos $[DOE]$ e $[ADE]$ são equiláteros. Assim, os triângulos $[DBO]$, $[EOC]$, $[DOE]$ e $[ADE]$ são congruentes e têm a mesma área, t .

Seja s a área da região limitada pelo arco DE e pela corda $[DE]$.

Solução 1: Por aplicação do Teorema de Pitágoras, tem-se $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Então, $s = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ e portanto a área da região sombreada é $t - s + 2s = t + s = \frac{\pi}{6}$ cm².

Solução 2: A área da região sombreada é dada por $2s + t - s = s + t$. Observe-se que a área do semicírculo é $3(s + t)$. Logo a área da região sombreada é $\frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ cm}^2$.

6. Todo o número da forma $6k$, com $k > 1$, é abundante porque é, pelo menos, divisível por $1, k, 2k, 3k$ e $6k$, cuja soma é maior do que $12k$.

Se $n > 46$ e n é múltiplo de 6, então $n = 12 + (n - 12)$, e as parcelas 12 e $n - 12$ são múltiplas de 6 e maiores do que 6, logo abundantes.

Como só se consideram números pares, interessa encontrar dois números abundantes menores do que 46 cujo resto da divisão por 6 seja 2 e 4.

Ora, 20 é abundante ($1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42 > 20$) e o resto da sua divisão por 6 é 2. Como 20 é abundante, também 40 é abundante e o resto da sua divisão por 6 é 4.

Assim, se $n > 46$ e o resto da divisão de n por 6 é 2, então $n = 20 + (n - 20)$, que é a soma de dois números abundantes já que $n - 20$ é múltiplo de 6 e maior do que 6.

Por fim, se $n > 46$ e o resto da sua divisão por 6 é 4, então $n = 40 + (n - 40)$, que é a soma de dois números abundantes porque $n - 40$ é múltiplo de 6 e maior do que 6.