



Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam  $x$  o número de quilómetros do trilho e  $y$  o número de quilómetros de subidas do percurso de ida. Assim, o percurso de ida tem  $x - y$  quilómetros de descidas.

No percurso de ida, a Sílvia e o Manuel subiram  $y$  km a 3 km/h, pelo que demoraram  $\frac{y}{3}$  horas a subir o trilho. Da mesma forma, conclui-se que, no percurso de ida, a Sílvia e o Manuel desceram o trilho durante  $\frac{x - y}{4}$  horas.

Assim  $\frac{y}{3} + \frac{x - y}{4} = 3 + \frac{2}{3}$ , ou seja,

$$\frac{y}{12} + \frac{x}{4} = \frac{11}{3}. \quad (1)$$

Analogamente se conclui que, no regresso, a Sílvia e o Manuel subiram durante  $\frac{x - y}{3}$  horas e desceram durante  $\frac{y}{4}$  horas. Assim,  $\frac{x - y}{3} + \frac{y}{4} = 3 + \frac{1}{3}$ , ou seja,

$$-\frac{y}{12} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}. \quad (2)$$

Somando as equações (1) e (2) obtém-se  $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{21}{3}$ , ou seja,  $x = 12$  km.

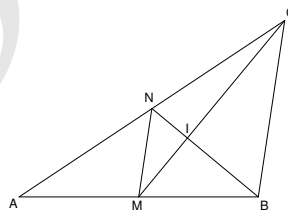
Portanto, o trilho tem 12 km de comprimento.

2. Designe-se por  $S_n$  a soma de todos os números da circunferência no fim do passo  $n$  e determine-se a relação entre  $S_n$  e  $S_{n+1}$ . Cada número colocado na circunferência no passo  $n + 1$  obtém-se somando dois números da circunferência no passo  $n$ . Cada número da circunferência no passo  $n$  é parcela dos dois números que vão aparecer no meio dos arcos dos quais é extremidade. Logo, a soma dos números que são colocados no passo  $n + 1$  é o dobro de  $S_n$ , pelo que  $S_{n+1} = S_n + 2S_n = 3S_n$ .

Assim  $S_1 = 2$ ,  $S_2 = 2 \times 3$ ,  $S_3 = 2 \times 3^2$ , ...,  $S_{2006} = 2 \times 3^{2005}$ .

Portanto, a soma de todos os números escritos pelo Francisco ao fim de 2006 passos é  $2 \times 3^{2005}$ .

3. Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $[AB]$  e  $[AC]$ , respectivamente, e  $I$  o ponto de intersecção das medianas  $[MC]$  e  $[NB]$ .



Os triângulos  $[ABC]$  e  $[AMN]$  são semelhantes porque têm um ângulo geometricamente igual e verificam  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = 2$ . Assim,  $[MN]$  e  $[BC]$  são paralelos e  $\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = 2$ , pelo que os triângulos  $[MIN]$  e  $[CIB]$  são semelhantes e

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IM}} = 2.$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos rectângulos  $[BIM]$  e  $[CNI]$ , obtém-se

$$\overline{IM}^2 + 4\overline{IN}^2 = \overline{IM}^2 + \overline{IB}^2 = \overline{BM}^2 = 3^2 = 9$$

e

$$4\overline{IM}^2 + \overline{IN}^2 = \overline{IC}^2 + \overline{IN}^2 = \overline{CN}^2 = 4^2 = 16.$$

Deste modo,  $5\overline{IM}^2 + 5\overline{IN}^2 = 9 + 16 = 25$ , logo  $\overline{NM} = \sqrt{\overline{IN}^2 + \overline{IM}^2} = \sqrt{5}$ .

Portanto,  $\overline{BC} = 2\overline{NM} = 2\sqrt{5}$ .

4. O conjunto  $\{1, 2, 4\}$  é triprimo porque  $1 + 2 + 4 = 7$  é um número primo.

Seja  $S$  um conjunto triprimo com 4 elementos. Então  $S$  não pode ter três elementos pares pois a sua soma seria um número par. Logo  $S$  tem pelo menos dois elementos ímpares. Se  $S$  tivesse algum elemento par, a soma dele com os dois elementos ímpares seria par. Conclui-se assim que todos os elementos de  $S$  são ímpares.

Considerem-se agora os restos da divisão dos elementos de  $S$  por 3. Se houvesse três elementos de  $S$  com o mesmo resto, a sua soma seria múltipla de 3. Se  $S$  contivesse um elemento de resto 0, um elemento de resto 1 e um elemento de resto 2, a sua soma seria novamente um múltiplo de 3. Logo  $S$  contém dois elementos com um resto e dois elementos com outro resto.

Procure-se um conjunto triprimo com quatro elementos ímpares cujos restos da divisão por 3 sejam 0 e 1. Os primeiros números ímpares que têm resto 0 quando divididos por 3 são 3 e 9 e os primeiros números ímpares que têm resto 1 quando divididos por 3 são 1 e 7. Verifica-se facilmente que  $\{1, 3, 7, 9\}$  é de facto um conjunto triprimo.

Suponha-se agora que existe um conjunto triprimo  $S$  com pelo menos 5 elementos. O raciocínio anterior mostra que  $S$  só pode ter dois elementos com o mesmo resto da divisão por 3, portanto terá pelo menos um elemento para cada resto 0, 1 ou 2. A soma destes elementos é múltipla de 3.

Portanto o número máximo de elementos de um conjunto triprimo é 4.