



# Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIV OPM - Final - 1.º dia - 31.03.2006 - Categoria B

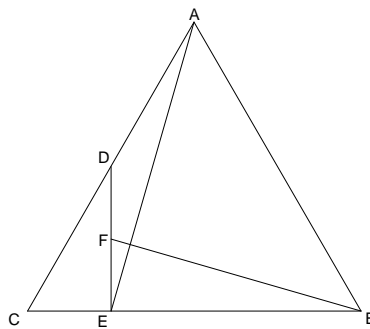
<http://www.spm.pt/~opm>

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.*

1. O Alexandre e o Herculano estão na estação de Campanhã à espera do comboio. Para se entreterem, decidem calcular o comprimento de um comboio de mercadorias que passa pela estação sem alterar a velocidade. Quando a frente do comboio passa por eles, o Alexandre começa a andar no sentido do movimento do comboio e o Herculano começa a andar no sentido oposto. Os dois caminham à mesma velocidade e cada um deles pára no momento em que se cruza com o fim do comboio. O Alexandre andou 45 metros e o Herculano 30. Qual é o comprimento do comboio?
2. No triângulo equilátero  $[ABC]$ ,  $D$  é o ponto médio de  $[AC]$ ,  $E$  é a projecção ortogonal de  $D$  sobre  $[CB]$  e  $F$  é o ponto médio de  $[DE]$ . Prova que  $[FB]$  e  $[AE]$  são perpendiculares.



3. Uma unidade de embalagem de feijões tem uma máquina que coloca uma certa quantidade de feijões em sacos e em seguida coloca uma certa quantidade de sacos em caixas, que depois são enviadas aos clientes. Num dia, a máquina avariou-se e os primeiros  $n$  sacos saíram vazios, os  $n$  seguintes saíram com 1 feijão, os  $n$  seguintes com 2 feijões, ..., e os últimos  $n$  com 2006 feijões. Para fornecer a cada cliente a quantidade de sacos e feijões combinada, o responsável pela unidade pretende distribuir os sacos pelas 2007 caixas desse dia de modo que todas as caixas contenham o mesmo número de sacos e todas as caixas contenham o mesmo número de feijões. Para que valores de  $n$  é isso possível?