Olimpíadas Portuguesas
de Matemática

XXIV OPM - Final - 1º dia - 31.03.2006 - Categoria B

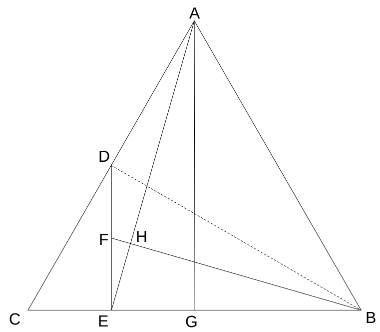
http://www.spm.pt/~opm

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

*Sugestões para a resolução dos problemas*

1. O Alexandre andou mais $45 - 30 = 15$ metros do que o Herculano e, no período de tempo que o Alexandre demorou a percorrer esses 15 metros, o comboio andou $45 + 30 = 75$ metros. Portanto, no mesmo período de tempo, o comboio percorre $75/15 = 5$ vezes mais metros do que cada um dos rapazes. Assim, enquanto o Herculano andou 30 metros, o comboio andou $30 \times 5 = 150$ metros. Como o Herculano começou a andar quando foi passado pela frente do comboio, parou quando se cruzou com o fim do comboio e andou $30$ metros no sentido oposto, então o comboio tem $150 + 30 = 180$ metros de comprimento.

2. Seja $G$ a projecção ortogonal de $A$ sobre $[CB]$ e $H$ a intersecção de $[BF]$ e $[AE]$. Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é equilátero, $[BD]$ é perpendicular a $[AC]$ e os triângulos $[DBC]$, $[EDC]$ e $[EBD]$ são semelhantes. Por outro lado, os triângulos $[GAC]$ e $[EDC]$ são semelhantes e $D$ é o ponto médio de $[AC]$, logo $E$ é o ponto médio de $[CG]$. Assim, $[AE]$ e $[FB]$ são medianas dos triângulos semelhantes $[GAC]$ e $[EBD]$, sobre os lados $[CG]$ e $[ED]$, respectivamente. Portanto os triângulos $[EBF]$ e $[GAE]$ são semelhantes e $G\hat{A}E = E\hat{B}F$. Note-se que, sendo $[GAE]$ um triângulo rectângulo, $G\hat{E}A = 90^o - G\hat{A}E = 90^o - E\hat{B}F$. Conclui-se que o triângulo $[BHE]$ é rectângulo e, portanto, $[AE]$ e $[FB]$ são perpendiculares.




3. O número total de feijões a distribuir pelas $2007$ caixas é $(0 + 1 + 2 + \ldots + 2006) \times n$, pelo que cada caixa deverá ficar com $n$ sacos e $1003n$ feijões.

   - Para $n = 1$ é claramente impossível já que cada caixa vai conter apenas um saco, tendo assim todas um número diferente de feijões.
   - Para $n = 2$ é possível efectuar a distribuição pretendida. Cada uma das $2007$ caixas conterá $2$ sacos e $2006$ feijões, que podem ser distribuídos da seguinte forma:
     - $2$ caixas contendo um saco vazio e um saco com $2006$ feijões
     - $2$ caixas contendo um saco com $1$ feijão e um saco com $2005$ feijões
     - $2$ caixas contendo um saco com $2$ feijões e um saco com $2004$ feijões
     - ...
     - $2$ caixas contendo um saco com $1002$ feijões e um saco com $1004$ feijões
     - $1$ caixa contendo os dois sacos com $1003$ feijões

ou seja, $2$ caixas contendo cada uma um saco com $i$ feijões e um saco com $2006 - i$ feijões, para $i = 0, 1, 2, \ldots, 1002$ e $1$ caixa contendo os dois sacos com $1003$ feijões.

- Para $n = 3$ é possível efectuar a distribuição pretendida. Cada uma das $2007$ caixas conterá $3$ sacos e $3009$ feijões, que podem ser distribuídos da seguinte forma:
  - $3$ caixas contendo um saco vazio, um saco com $1672$ feijões e um saco com $1337$ feijões
  - $3$ caixas contendo um saco com $1$ feijão, um saco com $1673$ feijões e um saco com $1335$ feijões
  - $3$ caixas contendo um saco com $2$ feijões, um saco com $1674$ feijões e um saco com $1333$ feijões
  - $\ldots$
  - $3$ caixas contendo um saco com $334$ feijões, um saco com $2006$ feijões e um saco com $669$ feijões
  - $3$ caixas contendo um saco com $335$ feijões, um saco com $1338$ feijões e um saco com $1336$ feijões
  - $3$ caixas contendo um saco com $336$ feijões, um saco com $1339$ feijões e um saco com $1334$ feijões
  - $3$ caixas contendo um saco com $337$ feijões, um saco com $1340$ feijões e um saco com $1332$ feijões
  - $\ldots$
  - $3$ caixas contendo um saco com $668$ feijões, um saco com $1671$ feijões e um saco com $670$ feijões

  ou seja, $3$ caixas contendo cada uma um saco com $i$ feijões, um saco com $1672 + i$ feijões e um saco com $1337 - 2i$ feijões, para $i = 0, 1, 2, \ldots, 334$ e $3$ caixas contendo cada uma um saco com $335 + i$ feijões, um saco com $1338 + i$ feijões e um saco com $1336 - 2i$ feijões, para $i = 0, 1, 2, \ldots, 333$.

  É imediato verificar que todos os sacos foram utilizados e que cada caixa contém $3009$ feijões.

- Para qualquer $n \geq 4$ também é possível efectuar a distribuição pretendida. Basta observar que se pode decompor $n$ como soma de $2$'s e $3$'s e como tal a distribuição pretendida obtém-se reunindo distribuições iguais às anteriores. Por exemplo, para $n = 11 = 4 \times 2 + 3$ colocar-se-ia em cada caixa $4$ vezes o conteúdo de cada uma das caixas da distribuição obtida para $n = 2$ e uma vez o conteúdo de cada uma das caixas da distribuição obtida para $n = 3$.

Logo é possível efectuar a distribuição pretendida se e só se $n > 1$.