Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXV OPM - Final - 1º dia - 23.03.2007 - Categoria B

Duração: 3 horas

Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

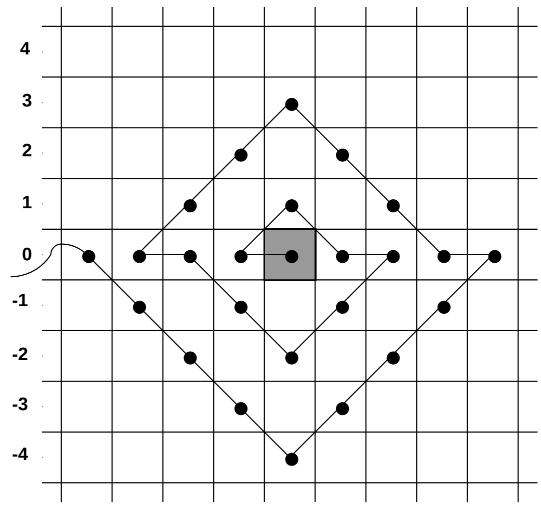
1. O João tinha pérolas azuis, brancas e vermelhas e com elas construiu um colar com 20 pérolas que tem tantas pérolas azuis como brancas. O João reparou que, independentemente do modo como cortasse o colar em duas partes, ambas com um número par de pérolas, uma das partes teria sempre mais pérolas azuis do que brancas. Quantas pérolas vermelhas tem o colar do João?

2. Sejam $[ABC]$ um triângulo e X, Y e Z pontos dos lados $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente. Mostra que as circunferências AXZ, BXY e CYZ se intersectam num ponto.

3. Determina o maior inteiro n que é múltiplo de todos os inteiros positivos inferiores a $\sqrt{n}$.

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. A Fernanda resolveu enfeitar uma manta de quadrados com uma fita e botões, pondo um botão no centro de cada quadrado onde passa a fita e formando o desenho indicado na figura. Se a Fernanda cose o primeiro botão no quadrado sombreado da linha 0, em que linha cose o 2007^o botão?



5. A rua do António tem 100 casas numeradas de 1 a 100. Qualquer casa numerada com a diferença dos números de duas casas da mesma cor é de uma cor diferente. Mostra que na rua do António há casas de, pelo menos, cinco cores diferentes.

6. Numa aldeia a distância máxima entre duas casas é M e a distância mínima é m. Prova que se a aldeia tem 6 casas, então $M/m \geq \sqrt{3}$.

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Observe-se que o colar verifica as três propriedades seguintes.

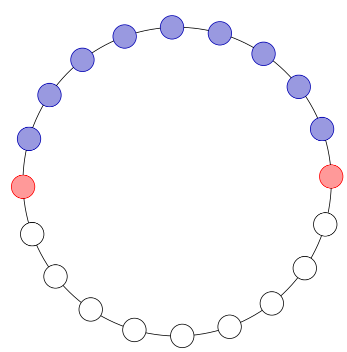
   (a) O colar não tem duas pérolas vermelhas lado a lado.
   Se o colar tivesse duas pérolas vermelhas lado a lado, então seria possível separar essas duas pérolas das outras. O colar ficaria assim separado em duas partes, tendo cada uma dessas partes o mesmo número de pérolas azuis e de pérolas brancas.

   (b) O colar não tem uma pérola azul e uma pérola branca lado a lado.
   Se tivesse, então bastaria separar essas duas pérolas das outras para separar o colar em duas partes, tendo cada uma delas o mesmo número de pérolas azuis e de pérolas brancas.

   (c) O número de pérolas vermelhas não pode ser zero porque nesse caso existiria uma pérola azul ao lado de uma pérola branca.

   Uma vez que o número de pérolas vermelhas é par, o colar tem pelo menos duas pérolas vermelhas. Além disso, entre duas pérolas vermelhas consecutivas só há pérolas da mesma cor.

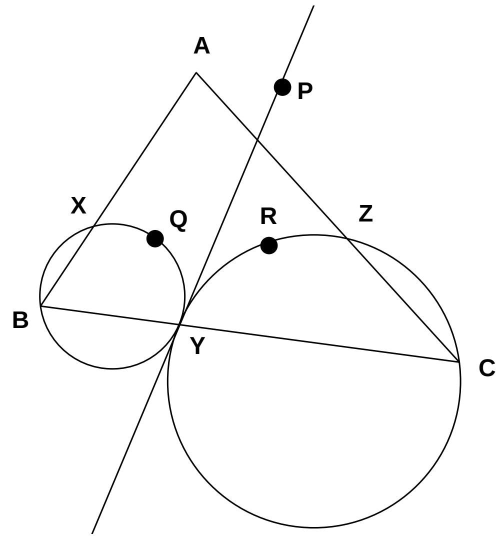
   Pelo menos uma das pérolas vermelhas tem uma sucessão de pérolas azuis de um lado e uma sucessão de pérolas brancas do outro. Suponha-se que o comprimento da sucessão de pérolas azuis é menor ou igual do que o da sucessão de pérolas brancas. Deste modo, existe no colar uma sucessão de pérolas do tipo $V\underbrace{AA...A}_{n}V\underbrace{B...BB}_{n}$, com tantas pérolas azuis como brancas. Logo, o resto do colar também tem um número igual de pérolas azuis e brancas e, por isso, esta sucessão tem de ser a totalidade do colar. Assim, o colar tem duas pérolas vermelhas, nove azuis e nove brancas.



   Resta verificar que este colar está nas condições do enunciado. Corte-se o colar em duas partes com um número par de pérolas cada uma. Se uma das partes não tiver pérolas vermelhas, então só tem pérolas azuis ou só tem pérolas brancas, portanto uma das partes tem mais pérolas azuis do que brancas. Se em cada uma das partes há uma pérola vermelha, então uma das partes tem mais pérolas azuis e a outra mais pérolas brancas.

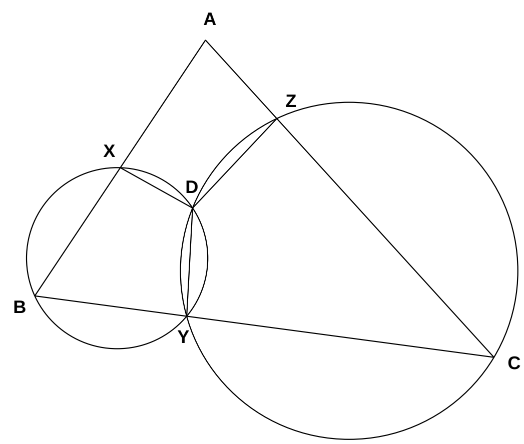
2. Sejam C_1 e C_2 as circunferências BXY e CYZ, respectivamente. Estas circunferências intersectam-se, pelo menos, em Y.

   Considere-se primeiro o caso em que C_1 e C_2 se intersectam apenas em Y, isto é, C_1 e C_2 são tangentes em Y. Trace-se a recta tangente a C_1 e C_2 em Y e considerem-se os pontos auxiliares P, Q e R indicados na figura.



Então $X\hat{Y}Z = X\hat{Y}P + P\hat{Y}Z = \frac{1}{2}\widehat{YQX} + \frac{1}{2}\widehat{ZRY} = A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^o - C\hat{A}B$.

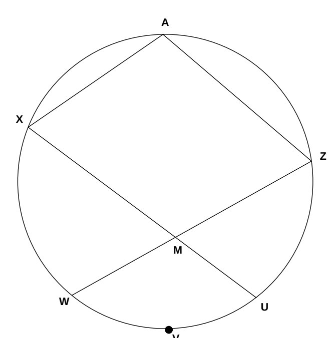
Considere-se agora o caso em que C_1 e C_2 se intersectam não apenas em Y mas também noutro ponto, D.



Neste caso, $Y\hat{D}X = \frac{1}{2}\widehat{XBY} = 180^o - \frac{1}{2}\widehat{YDX} = 180^o - X\hat{B}Y = 180^o - A\hat{B}C$ e, de modo análogo, $Z\hat{D}Y = 180^o - B\hat{C}A$. Então, $X\hat{D}Z = 360^o - Y\hat{D}X - Z\hat{D}Y = A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^o - C\hat{A}B$.

Em qualquer dos casos provou-se que existe um ponto M pertencente às circunferências C_1 e C_2 e tal que $X\hat{M}Z = 180^o - C\hat{A}B = 180^o - Z\hat{A}X$ ($M = Y$ no primeiro caso e $M = D$ no segundo caso).

Uma vez que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360^o, também se tem $A\hat{X}M = 180^o - M\hat{Z}A$. Se M pertence ao círculo delimitado pela circunferência C_3 tem-se a situação da figura seguinte.



De $\widehat{UZA} = 2A\hat{X}U = 2A\hat{X}M = 360^o - 2M\hat{Z}A = 360^o - 2W\hat{Z}A = 360^o - \widehat{AXW}$ conclui-se que $\widehat{WVU} = 0^o$ e, portanto, M pertence à circunferência C_3.

De modo análogo, se se supuser que M não pertence ao interior do círculo delimitado pela circunferência C_3, chega-se à mesma conclusão.

Assim, M pertence a C_3 e, portanto, as três circunferências intersectam-se em M.

Observação: Algumas partes desta resolução podem ser simplificadas utilizando o resultado: Um quadrilátero pode ser inscrito numa circunferência se e só se os ângulos internos opostos são suplementares.

3. Observe-se que se n e a são inteiros positivos tais que $a^2 < n \leq (a+1)^2$, então n é múltiplo de todos os inteiros positivos inferiores a $\sqrt{n}$ se e só se n é múltiplo de $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a)$. Assim, em $\{1,2,3,4\}$ todos os inteiros satisfazem a condição do enunciado, em $\{5,6,7,8,9\}$ são os pares que satisfazem essa condição, em $\{10,11,\ldots,16\}$ são os múltiplos de 6 e em $\{17,18,\ldots,25\}$ são os múltiplos de 12. Uma vez que $\mathrm{m.m.c.}(2,3,4,5) = 60 > 36$, em $\{26,27,\ldots,36\}$ nenhum inteiro satisfaz a condição do enunciado.

   De seguida mostra-se que nenhum inteiro superior a 25 está nas condições do enunciado, provando que, para a inteiro, se $a \geq 5$ então $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a) > (a+1)^2$. Como já se viu, esta desigualdade é válida para $a = 5$.

   Suponha-se que, para algum $a \geq 5$, se tem $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a) > (a+1)^2$ e $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a,a+1) \leq (a+2)^2$. Claro que $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a) \leq \mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a,a+1)$ e, portanto,

$$(a+1)^2 < \mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a,a+1) \leq (a+2)^2 .$$

   Uma vez que $(a+2)^2 = (a+1)(a+3)+1 < (a+1)(a+4)$, os múltiplos de $a+1$ superiores a $(a+1)^2$ e não superiores a $(a+2)^2$ são apenas $(a+1)(a+2)$ e $(a+1)(a+3)$. Se fosse $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a,a+1) = (a+1)(a+2) = a^2+3a+2$, a dividiria 2, o que não pode ser porque $a \geq 5$. Analogamente também não pode ser $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a,a+1) = (a+1)(a+3) = a^2+4a+3$ porque a não divide 3.

   Está assim provado que, para $a \geq 5$, se $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a) > (a+1)^2$ então $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a,a+1) > (a+2)^2$. Uma vez que $\mathrm{m.m.c.}(2,3,4,5) > (5+1)^2$, conclui-se que, para $a \geq 5$, se tem $\mathrm{m.m.c.}(2,3,\ldots,a) > (a+1)^2$, o que mostra que nenhum inteiro n superior a 25 é múltiplo de todos os inteiros inferiores a $\sqrt{n}$. Assim, o maior inteiro nessas condições é o maior múltiplo de 12 que não excede 25, ou seja, 24.

Sugestões para a resolução dos problemas

4. **Solução 1:** Na coluna do quadrado sombreado são cosidos os botões de ordem

$$1, 3, 7, 13, 21, 31 \dots$$

Note-se que vale a seguinte correspondência:

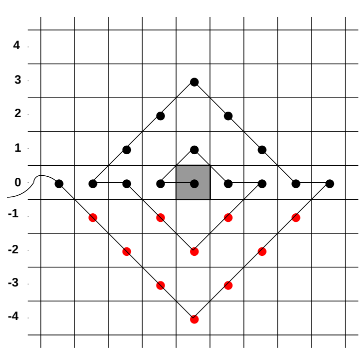
botão	linha
1^o	0
3^o	1
7^o	-2
13^o	3
21^o	-4
31^o	5
$\dots$	$\dots$

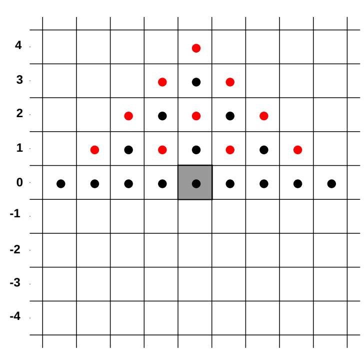
No quadrado da coluna central e da linha $-n$, se n é par, ou na linha n, se n é ímpar, é cosido o botão de ordem

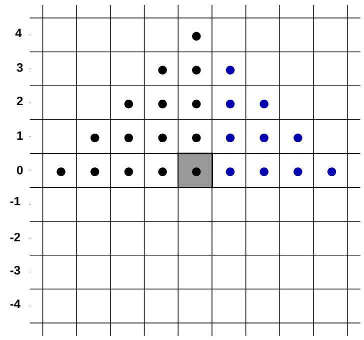
$$1 + \sum_{i=1}^{n} 2i = 1 + n + n^2.$$

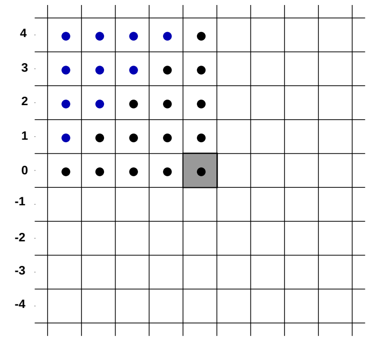
Como $1 + 44 + 44^2 = 1981 < 2007$ e $1 + 45 + 45^2 = 2071 > 2007$, então o 2007^o botão é cosido num dos quadrados que formam o percurso da fita desde a linha -44 até à linha 45. Por outro lado, $2007 = 1981 + 26$ e, portanto, depois de cosidos 1981 botões até ao quadrado que está na linha -44 e na coluna central, cosem-se os últimos 26 botões. Logo, o último botão é cosido na linha $-44 + 26 = -18$.

Solução 2: Observe-se que nas quatro figuras seguintes o número de botões é sempre o mesmo.









Isto é geral. Se em determinado momento há n botões cosidos na coluna do quadrado sombreado e o último botão foi cosido na linha 0 mas o penúltimo não, então o número de botões já cosidos é n^2. Mais, o último botão a ser cosido está à direita ou à esquerda do quadrado sombreado e, portanto, os dois botões seguintes são cosidos nas linhas 0 e -1 ou nas linhas 0 e 1, consoante n é par ou ímpar. Uma vez que $44^2 = 1936 < 2007 < 2025 = 45^2$ e $2025 - 2007 = 18 < 45$, o 2007^o botão está 18 linhas abaixo da linha zero, isto é, na linha -18.

5. Suponha-se que as 100 casas são, quando muito, de quatro cores diferentes. Neste caso, há pelo menos 25 casas da mesma cor. Considere-se que essa cor é o amarelo. Sejam $x_1, x_2, ..., x_{25}$ os números dessas 25 casas ordenados de forma crescente. Os números $x_{25} - x_{24}, x_{25} - x_{23}, ..., x_{25} - x_1$ são todos diferentes e as casas com esses números são das outras três cores. Pelo menos oito dessas casas são da mesma cor, que se supõe ser a cor branca.

   Sejam $a_1, a_2, ..., a_8$ os números dessas oito casas ordenados de forma crescente. Para cada $i = 1, ..., 8$, $a_i = x_{25} - x_{k_i}$ com k_i um número inteiro entre 1 e 24, logo $a_i - a_j = (x_{25} - x_{k_i}) - (x_{25} - x_{k_j}) = x_{k_j} - x_{k_i}$, ou seja, a diferença entre dois dos números $a_1, a_2, ..., a_8$ é ainda a diferença entre dois dos números $x_1, x_2, ..., x_{25}$. Tem-se assim que os números $a_8 - a_7, ..., a_8 - a_1$ são todos diferentes e as respectivas casas não são nem brancas, nem amarelas. Portanto, pelo menos quatro dessas casas são da mesma cor que se supõe ser a cor azul.

   Sejam b_1, b_2, b_3, b_4 os números dessas quatro casas azuis ordenados de forma crescente. Tal como se viu anteriormente, a diferença entre dois desses números é igual à diferença entre dois dos números $a_1, a_2, ..., a_8$, que por sua vez é igual à diferença entre dois dos números $x_1, x_2, ..., x_{25}$.

   Como se supôs que as casas são, no máximo, de quatro cores diferentes, as casas com os números $b_4 - b_3$, $b_4 - b_2, b_4 - b_1, b_3 - b_2, b_3 - b_1, b_2 - b_1$ são de uma quarta cor, por exemplo, cor-de-rosa. Mas $(b_4 - b_2) - (b_4 - b_3) = b_3 - b_2$ e, por isso, existem duas casas cor-de-rosa tais que a casa cujo número é igual à diferença dos seus números é também cor-de-rosa, o que é impossível. Chega-se assim à conclusão que as casas são de, pelo menos, cinco cores.

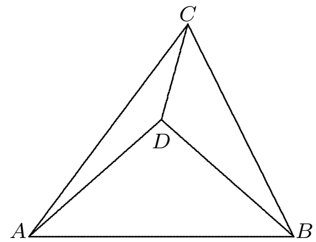
6. Em primeiro lugar, suponha-se que existem três casas colineares.

   Supondo que $\overline{AB} \leq \overline{BC}$ e como $M \geq \overline{AC}$ e $m \leq \overline{AB}$, tem-se

$$\frac{M}{m} \geq \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \geq 2 \geq \sqrt{3}.$$

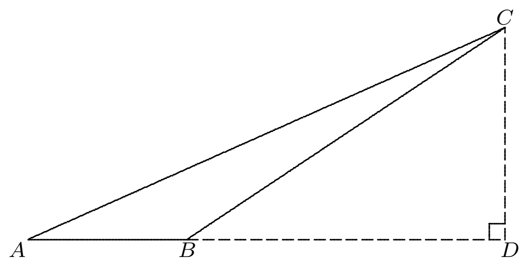
   Se as seis casas definem um hexágono convexo, então um dos ângulos internos deste hexágono mede pelo menos 120^o. Este ângulo é definido por três vértices do hexágono que definem um triângulo em que um dos ângulos é maior ou igual a 120^o.

Se as seis casas não definem um hexágono convexo, então é possível encontrar três vértices do hexágono, A, B e C, tal que triângulo por eles definido, $[ABC]$, contém outro vértice do hexágono, D, no seu interior.



Um dos ângulos em D tem de ser superior ou igual a 120^o. Deste modo conclui-se que é possível escolher três casas tais que o triângulo por elas definido tem um ângulo maior ou igual a 120^o.

Assim, seja $[ABC]$ um triângulo definido por três casas, tal que $A\hat{B}C \geq 120^o$. Suponha-se ainda que $\overline{AB} \leq \overline{BC}$.



Por hipótese, $\overline{AB} \geq m$ e $\overline{AC} \leq M$, logo $\dfrac{M}{m} \geq \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Seja D o pé da perpendicular a $[AB]$ que passa por C. Note-se que

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AB} + \overline{BD})^2 + \overline{CD}^2 \\ &= \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \\ &= \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BC}^2. \end{aligned}$$

Mas $\overline{BD} = \overline{BC} \cos C\hat{B}D$ logo,

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BC} \cos C\hat{B}D.$$

Como $C\hat{B}D = 180^o - A\hat{B}C \leq 60^0$, tem-se $\cos C\hat{B}D \geq \dfrac{1}{2}$ e

$$\overline{AC}^2 \geq 3\,\overline{AB}^2.$$

Portanto,

$$\frac{M}{m} \geq \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \geq \sqrt{3}.$$

Observação: Na resolução deste problema poder-se-ia ter aplicado imediatamente a lei dos co-senos, segundo a qual, dado um qualquer triângulo $[ABC]$, tem-se

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BC} \cos A\hat{B}C.$$