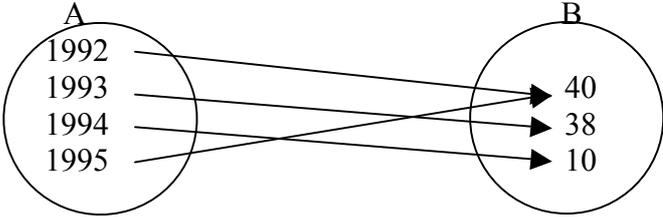
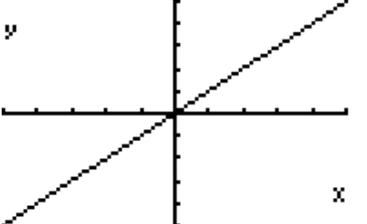
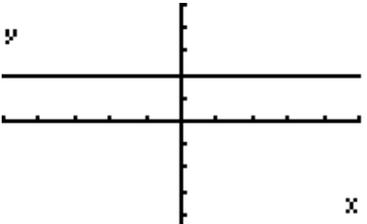
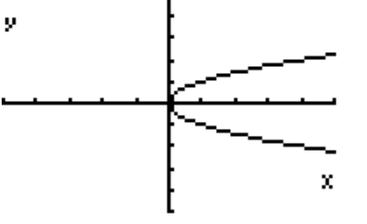
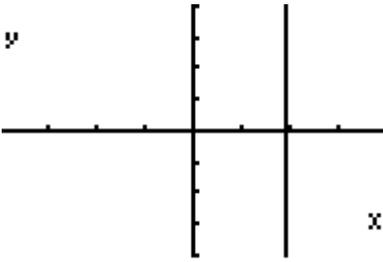
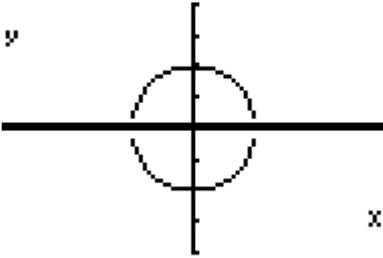


Módulo 3 – FUNÇÕES (1ª Parte)

Exercícios	Objectivos										
<p>1)</p> <p>O esquema seguinte representa uma página da agenda telefónica da Mafalda</p> <table border="1" data-bbox="188 557 938 813"> <thead> <tr> <th>A (nomes)</th> <th>B (telefonos)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">Médico (João)</td> <td>239712345...(casa)</td> </tr> <tr> <td>239723456...(consultório)</td> </tr> <tr> <td>912345678...(telemóvel)</td> </tr> <tr> <td>Ana</td> <td>962345871</td> </tr> <tr> <td>Isabel</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>A Dr^a Joana perguntou à turma se o esquema representava uma função de A para B.</p> <p>O António respondeu: “A correspondência não é uma função, porque ao “Médico” correspondem três telefones”.</p> <p>A Maria respondeu: “A correspondência não é uma função porque a “Isabel” não tem telefone”.</p> <p>Qual dos dois respondeu correctamente?</p>	A (nomes)	B (telefonos)	Médico (João)	239712345...(casa)	239723456...(consultório)	912345678...(telemóvel)	Ana	962345871	Isabel		<p>Recordar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • definição de: <ul style="list-style-type: none"> ➤ função ➤ objecto ➤ imagem ➤ domínio ➤ conjunto de chegada. ➤ contradomínio • modos de representar uma função: <ul style="list-style-type: none"> ➤ tabela, ➤ expressão analítica ➤ gráfico.
A (nomes)	B (telefonos)										
Médico (João)	239712345...(casa)										
	239723456...(consultório)										
	912345678...(telemóvel)										
Ana	962345871										
Isabel											
<p>2)</p> <p>Observe o diagrama seguinte, que corresponde à tabela e representa uma função.</p>  <table border="1" data-bbox="277 1709 944 1901"> <thead> <tr> <th>Ano</th> <th>Produção de um pomar de kiwis</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1992</td> <td>40 toneladas</td> </tr> <tr> <td>1993</td> <td>38 toneladas</td> </tr> <tr> <td>1994</td> <td>10 toneladas</td> </tr> <tr> <td>1995</td> <td>40 toneladas</td> </tr> </tbody> </table> <p>A correspondência inversa da apresentada, ou seja, a correspondência de B para A, seria uma função?</p>	Ano	Produção de um pomar de kiwis	1992	40 toneladas	1993	38 toneladas	1994	10 toneladas	1995	40 toneladas	<ul style="list-style-type: none"> • importância do domínio de f
Ano	Produção de um pomar de kiwis										
1992	40 toneladas										
1993	38 toneladas										
1994	10 toneladas										
1995	40 toneladas										

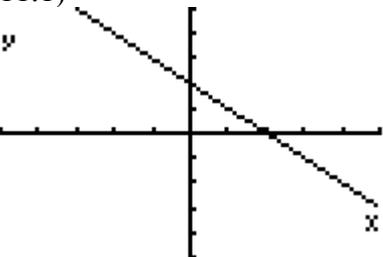
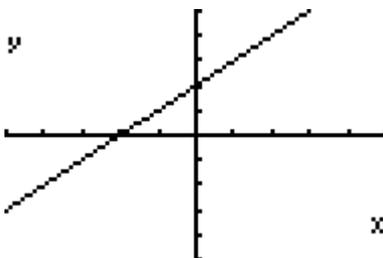
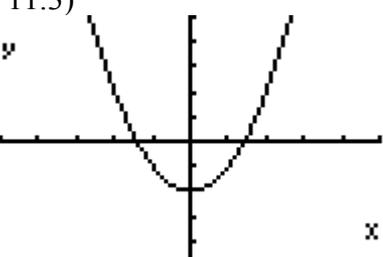
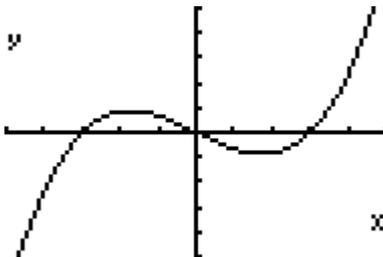
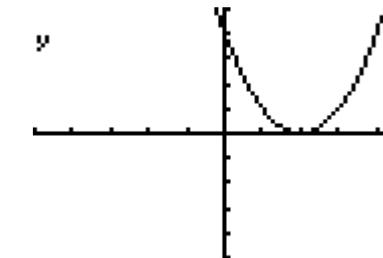
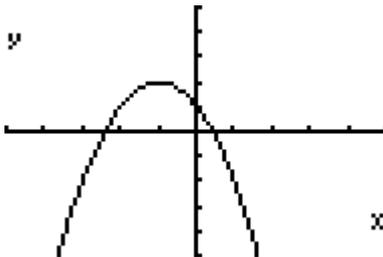
Exercícios	Objectivos
<p>3)</p> <p>Considere a função h definida em \mathbb{R} pela seguinte expressão designatória $h(x)=3x - 4$.</p> <p>Calcule:</p> <p>3.1) $h(-1)$ 3.2) $h(0)$ 3.3) $h(1)$ 3.4) Determine x de modo que $h(x) = 8$</p>	<p>Recordar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • o conceito de: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Variável independente ➤ Variável dependente • resolução de equações • operações com fracções • áreas • volumes
<p>4)</p> <p>Seja f a função definida em \mathbb{R} pela seguinte expressão designatória $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$</p> <p>Calcule:</p> <p>4.1) $f(\frac{1}{5}) + f(-1)$</p> <p>4.2) o objecto cuja imagem é $\frac{1}{12}$</p>	
<p>5)</p> <p>Um rectângulo de perímetro 20cm. Expresse a sua área como função do comprimento de um dos seus lados. Deduza a expressão analítica da função referida e indique o seu domínio.</p>	
<p>6)</p> <p>Um industrial deve fabricar latas cilíndricas com tampas, de volume fixo V. O material usado custa 5€ o m^2. Determine o custo unitário das latas como função de seu raio.</p>	
<p>7)</p> <p>De um pedaço de papelão quadrado com L cm de lado, deve-se construir uma caixa sem tampa de base quadrada. Determine a área lateral da caixa como função da sua altura.</p>	

Exercícios	Objectivos
<p>8)</p> <p>Represente graficamente cada uma das seguintes funções:</p> <p>8.1) $f(x)=x^2$, com $x \in \mathbb{N}_0$</p> <p>8.2) $f(x)=x^2$, com $x \in \mathbb{Z}$</p> <p>8.3) $f(x)=x^2$, com $x \in \mathbb{R}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Gráfico de uma função <ul style="list-style-type: none"> ➤ Função quadrática ➤ Função módulo
<p>9)</p> <p>Verifique se as seguintes expressões analíticas, definem a mesma função:</p> <p>9.1) $f(x)=x+3$ e $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$.</p> <p>9.2) $f(x)= x$ e $g(x)=\sqrt{x^2}$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Casos notáveis. • Importância do domínio de f
<p>10)</p> <p>Quais das seguintes curvas são gráficos de uma função?</p> <p>10.1 </p> <p>10.2 </p> <p>10.3 </p> <p>10.4 </p> <p>10.5 </p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer se uma curva em \mathbb{R}^2 é ou não gráfico de alguma função. • Propriedade gráfica: Qualquer recta vertical com $x \in D_f$, intersecta o gráfico da função num único ponto.

10.6)		
10.7)		

11)

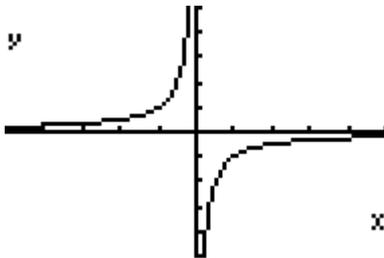
Faça a correspondência entre os seguintes gráficos de funções e as expressões analíticas correspondentes..

11.1)		11.2)		$f_1(x) = (x - 2)^2$
11.3)		11.4)		$f_2(x) = x(x^2 - 9) / 12$ $f_3(x) = 2 - x$
11.5)		11.6)		$f_4(x) = 2 - (x + 1)^2$ $f_5(x) = x + 2$ $f_6(x) = x^2 - 2$

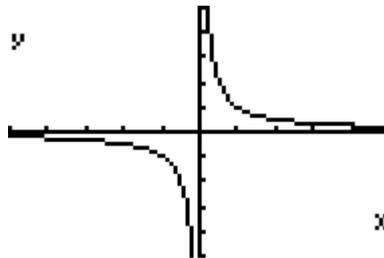
12)

Faça a correspondência entre os seguintes gráficos de funções e as expressões analíticas correspondentes..

12.1)



12.2)

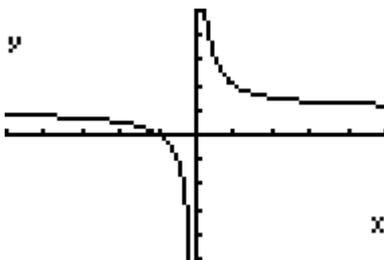


$$f_1(x) = -2 + 1/x$$

$$f_2(x) = 1 + 1/x^2$$

$$f_3(x) = 1 - 1/x^2$$

12.3)



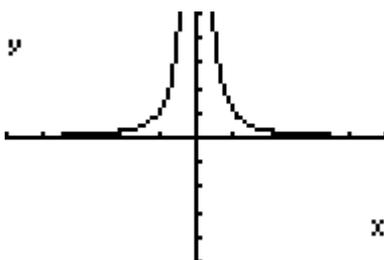
12.4)



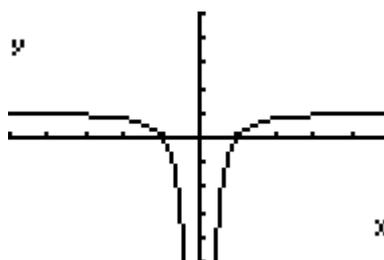
$$f_4(x) = 1/x^2$$

$$f_6(x) = 1 + 1/x$$

12.5)

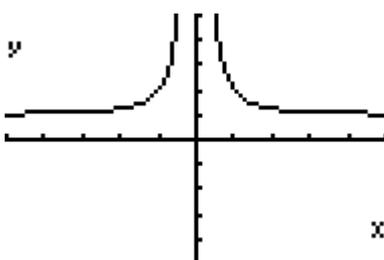


12.6)

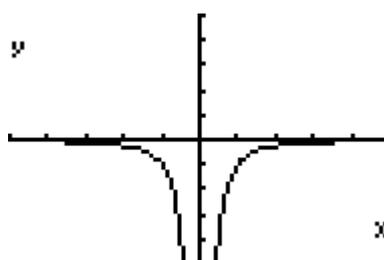


$$f_6(x) = -1/x^2$$

12.7)



12.8)



$$f_7(x) = 1/x$$

$$f_8(x) = -1/x$$

<p>13)</p> <p>Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:</p> <p>13.1) $f(x)=x^3+1$ 13.2) $f(x)=\frac{1}{x+2}$</p> <p>13.3) $f(x)=\frac{ x }{x}$ 13.4) $f(x)=\sqrt{x-\frac{1}{3}}$</p> <p>13.5) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 13.6) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$</p>	
<p>14)</p> <p>Represente graficamente e verifique se é injectiva e/ou monótona, cada uma das seguintes funções $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$</p> <p>14.1) $f(x)=x$ 14.1) $f(x)=x^2$</p> <p>14.3) $f(x)= x-1$ 14.4) $f(x)= x -1$</p> <p>14.5) $f(x)=\frac{1}{x}$ 14.6) $f(x)=3-x^2$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • função injectiva $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$ <p style="text-align: center;">ou</p> $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in D_f$ <ul style="list-style-type: none"> • Propriedade gráfica: <p>Qualquer recta horizontal que intersecta o gráfico da função só o pode intersectar num único ponto</p>
<p>15)</p> <p>Indique o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:</p> <p>15.1) Toda a função monótona é injectiva.</p> <p>15.2) Toda a função injectiva é monótona.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • função monótona: <ul style="list-style-type: none"> • crecente $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), x_1, x_2 \in D_f$ <ul style="list-style-type: none"> • decrecente $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), x_1, x_2 \in D_f$ <ul style="list-style-type: none"> • estritamente crescente $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), x_1, x_2 \in D_f$ <ul style="list-style-type: none"> • estritamente decrescente $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), x_1, x_2 \in D_f$

16)

Para cada $f_i(x)$, calcule (caso exista):

16.1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_i(x)$

16.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_i(x)$

16.3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f_i(x)$

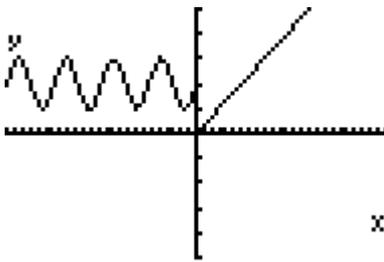
16.4) $\lim_{x \rightarrow a^+} f_i(x)$

16.5) $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$

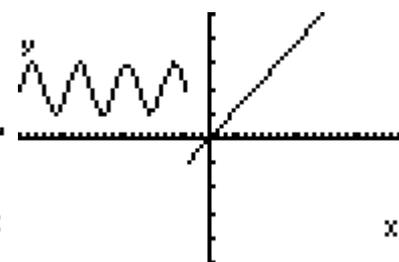
16.6) Df_i

16.7) $D'f_i$

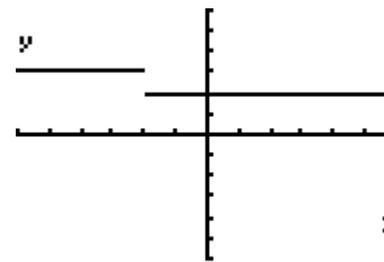
f_1 .



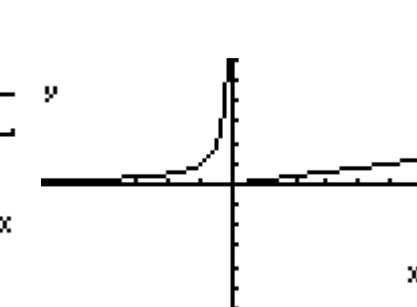
f_2



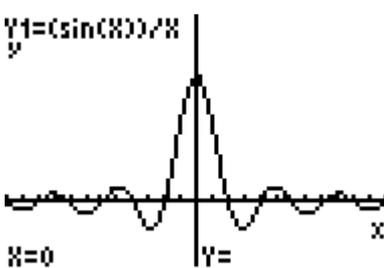
f_3



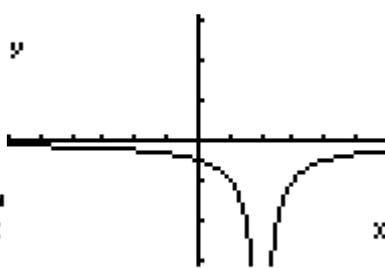
f_4



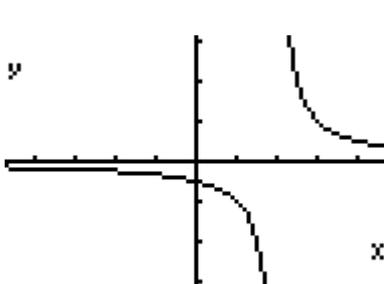
f_5



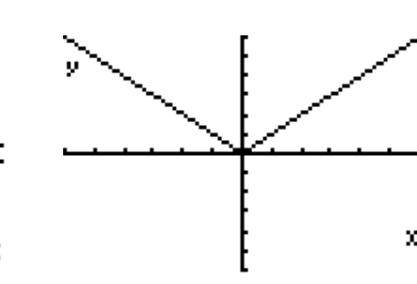
f_6



f_7



f_8



Funções definidas através do seu gráfico

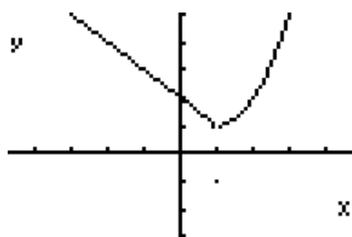
- **limites de funções**
- **domínio de uma função**
- **contradomínio de uma função**

<p>17)</p> <p>Calcule :</p> <p>17.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 17.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$</p> <p>17.3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 17.4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$</p> <p>17.5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x }{x}$ 17.6) $\lim_{x \rightarrow -2} x + 2$</p> <p>17.7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x}$ 17.8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x}$</p>	<p>Funções <u>definidas através da sua expressão analítica</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • limites de uma função (recorrendo ao seu gráfico) <ul style="list-style-type: none"> ➤ limite notável: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
<p>18)</p> <p>Calcule :</p> <p>18.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 18.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{5x^3 - 4x}$</p> <p>18.3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{5x^3 - 4x}$ 18.4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{5x^2 - 4x}$</p> <p>18.5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{5x^2 - 4x}$ 18.6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{5x^4 - 4x}$</p> <p>18.7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 18.8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$</p> <p>18.9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{8}{x}\right)^x$ 18.10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • limites de uma função (recorrendo à sua expressão analítica) <ul style="list-style-type: none"> ➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^m + \dots + a_m}{b_0 x^n + \dots + b_n} =$ $= \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & \text{se } m = n \\ +\infty & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$ ➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$ ➤ $\lim_{f(x) \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$,

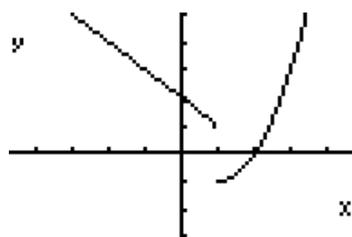
19)

Estude quanto à continuidade cada uma das seguintes funções, definidas pelo respectivo gráfico. Justifique e indique, caso existam, os pontos de descontinuidade onde há continuidade à direita ou à esquerda.

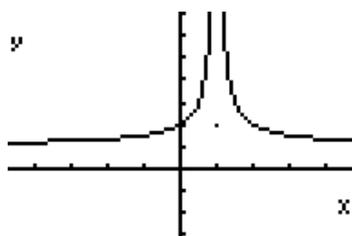
19.1)



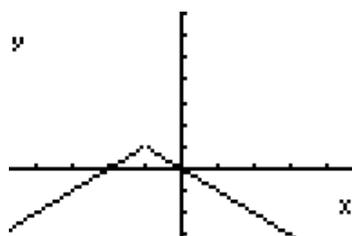
19.2)



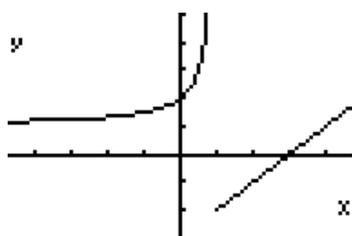
19.3)



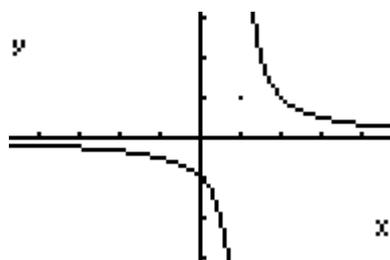
19.4)



19.5)



19.6)



20)

Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

20.1) Se f é contínua no ponto a , então existe o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

20.2) Se existe o $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então f é contínua no ponto a .

○ **função contínua num ponto** $a \in D_f$
sse

i) $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

ii) $L = f(a)$

• **função contínua à direita** de $a \in D_f$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

• **função contínua à esquerda** de $a \in D$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Obs:

Da definição decorre que:

uma função f é **descontínua no ponto** $a \in D_f$

• se não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ou

• se existindo este limite

se tem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

21)

Verifique se as seguintes funções são contínuas no seu domínio. Justifique. Caso seja descontínua nalgum ponto $a \in D_f$, indique se f é contínua à direita ou à esquerda de a .

21.1)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

21.2)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

21.3)

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

21.4)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

21.5)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$$

21.6)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

21.7)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

22)

Dê exemplos gráficos das seguintes situações:

22.1) Uma função descontínua no ponto $x=2$, mas contínua à esquerda de $x=2$.

22.2) Uma função descontínua em \mathbb{R} e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

22.3) Uma função em que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$ e

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$.

Esta função é contínua em $x=3$? Justifique.

<p>23)</p> <p>Use o Teorema de Bolzano – Cauchy, para verificar se cada uma das seguintes equações tem uma raiz no intervalo dado.</p> <p>23.1)</p> $x^3 - 3x + 1 = 0, \text{ em } [0,1]$ <p>23.2)</p> $\cos x = 2x, \text{ em } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ <p>23.3)</p> <p>$f(x)=x$, em $[0,1]$, sendo f contínua em $[0,1]$ e $f(x) \in]0,1[\forall x \in [0,1]$.</p>	<p>Teorema de Bolzano-Cauchy (teorema do valor intermédio)</p> <p>Se uma função f está definida e é contínua em $[a,b]$ então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.</p>
<p>24)</p> <p>Considere a função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$</p> <p>24.1) Calcule $f(-1)$</p> <p>24.2) Calcule $f(1)$</p> <p>24.3) Mostre que $f(-1) \cdot f(1) < 0$ e no entanto $\exists c \in]-1,1[: f(c) = 0$</p> <p>24.4) Mostre que a alínea anterior não contradiz o Teorema de Bolzano – Cauchy.</p>	<p>Corolário:</p> <p>Se uma função f está definida e é contínua em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ então $f(c) = 0$, para algum $c \in]a,b[$.</p> <p>Obs:</p> <p>Assim, se uma função f está definida e é contínua em $[a,b]$ e toma valores de sinal contrário entre a e b, então f tem de certeza um zero entre o ponto a e o ponto b.</p>