

# Visualização de Demonstrações Geométricas

(Versão 1.2)

Pedro Quaresma  
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra  
3001-454 COIMBRA, PORTUGAL  
pedro@mat.uc.pt

13 de Setembro de 2005

## Resumo

Pretende-se visualizar as demonstrações construtivas em Geometria Euclidiana. A especificação de uma construção geométrica através de uma linguagem que contenha os principais elementos construtivos da Geometria Euklidiana já é possível através do programa Eukleides. A sua integração com um demonstrador de teoremas capaz de produzir demonstrações geométricas é o passo seguinte. A visualização de demonstrações geométricas levanta problemas de escalamento, da escolha de um método construtivo de demonstração, e da visualização dos resultados. Embora o programa Eukleides tenha a capacidade de "animar" as construções por ele produzidas, falta-lhe ainda a capacidade de interagir com um programa de demonstração automática de forma a permitir visualizar o que o processo de demonstração. A produção de um sistema que permita produzir, ou pelo menos validar, demonstrações geométricas, com uma visualização das mesmas é o tópico principal do trabalho que está a ser desenvolvido de momento.

## 1 Introdução

No âmbito dos trabalhos propostos aquando dos Estágios Pedagógicos da Licenciatura em Matemática, Ramo Educacional, do Departamento de Matemática da F.C.T.U.C. foi identificada a necessidade de uma ferramenta computacional capaz de, visualizar as diferentes construções geométricas, permitir a inclusão dessas construções num dado texto matemático, e finalmente que possa interagir com um programa de demonstração automática de forma a permitir visualizar o que o processo de demonstração dos resultados geométricos apresentados, em geral sem demonstração, no 3º ciclo.

Note-se que, no que diz respeito ao processamento de textos, aponta-se para a utilização do processador  $\text{\LaTeX}$  [2, 5]<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>GUTpt, Grupo de utilizadores de (La) $\text{\TeX}$  Portugal, <http://gentzen.mat.uc.pt/~gutpt>  
TUG,  $\text{\TeX}$  User Group, <http://www.tug.org>.

A ferramenta encontrada foi o programa `eukleides` [3, 4] que, embora desenvolvido num ambiente *Linux/X-windows*, está também disponível no ambiente *MS-Windows*. No que diz respeito à especificação e visualização das construções assim como da conversão das mesmas para um formato apropriado para a escrita de textos matemáticos esta ferramenta permite responder às necessidades acima referidas e até ultrapassá-las. Com este programa é possível:

- descrever uma construção geométrica através de elementos construtivos básicos – *linguagem eukleides*;
- transformar as descrições em comandos legíveis pelo  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  – *conversor eukleides*;
- editar e visualizar as descrições. Podem-se acrescentar elementos interactivos nas construções geométricas – *editor/interpretador/visualizador xeukleides*.

No que diz respeito à especificação/visualização de construções geométricas o sistema responde de forma cabal ao que se tinha em mente. O mesmo acontece com a possibilidade de inclusão das imagens num texto matemático. O sistema não é um demonstrador de teoremas sendo que a ligação com um sistema deste tipo é, como se verá adiante, uma tarefa em desenvolvimento.

## 2 Visualização de Construções Geométricas

### 2.1 A Linguagem

A linguagem de especificação `eukleides` utiliza os construtores básicos da Geometria Euclidiana para especificar as figuras, por exemplo:

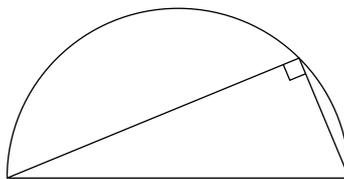


Figura 1: Teorema de Tales

foi produzido a partir dos seguintes comandos:

```
A=ponto(0,0); B=ponto(6,0)
c=círculo(A,B)
C=ponto(c,45:)
desenhar(c,0:,180:)
desenhar(A,B,C)
marca(A,C,B,recto)
```

Os construtores da linguagem `eukleides` são [3, 4]:

**Tipos Numéricos** Números reais e ângulos em graus. Estão disponíveis os habituais operadores aritméticos, assim como as funções pré-definidas usualmente disponíveis em linguagens de programação.

**Medidas Geométricas** Está disponível um conjunto extenso de funções de informação numérica sobre os vários objectos geométricos. Por exemplo dado um ponto `A`, tem-se que `abcissa(A)` é o valor da abcissa de `A` no referencial ortonormado definido.

**Construtores Geométricos** Conjunto extenso de construtores através dos quais se definem os vários objectos que depois se pode decidir «desenhar». Os elementos básicos que se podem especificar são: vectores; pontos; linhas rectas; segmentos de recta; círculos; cónicas; triângulos; polígonos.

Eis um outro exemplo:

```
caixa(-3,-1,9,14)
A B C D quadrado(6)
C E F G quadrado(3*sqrt(3),60:)
D G H I quadrado(3,60:)
J = projecção(G,linha(A,B))
desenhar(A,B,C,D)
desenhar(C,E,F,G)
desenhar(D,G,H,I)
desenhar(segmento(G,J),tracejado)
desenhar(segmento(G,A),pontead)
desenhar(segmento(G,B),pontead)
desenhar(segmento(D,E),pontead)
desenhar(segmento(C,I),pontead)
marca(C,G,D,recto)
marca(B,J,G,recto)
```

são os comandos necessários para se obter a figura 2.

Todas as construções feitas na linguagem `Eukleides` podem ser transcritas para o formato `LATEX+PsTricks` para posterior inclusão num texto no formato `LATEX`.

### 3 Visualização de Demonstrações Geométricas

O `xeukleides` é, a um só tempo, um editor, um interpretador e um visualizador, sendo que nesta última função acrescenta a possibilidade de construir figuras interactivas.

A interface simples mas muito eficaz do `xeukleides` permite ao utilizador criar as figuras geométricas que deseja com muita facilidade e rapidez (figuras 3 e 4).

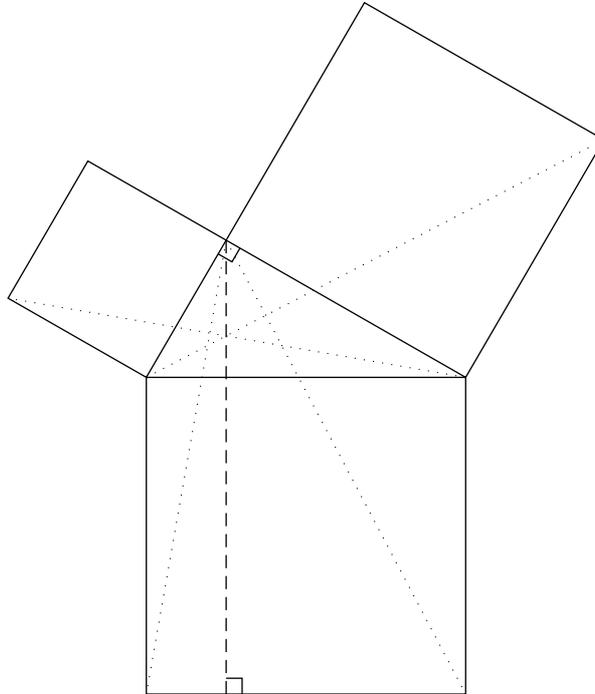


Figura 2: Teorema de Pitágoras

```

Xeuclidean - pitagorasPT.euk
Ficheiros Visualizar Ajustar Ajuda
% This is the classical Vecten's figure used by Euclid
% to demonstrate Pythagoras' theorem.
% Copyright (c) Christian Obrecht 2001

caixa(-3,-1,9,14)
A B C D quadrado(6)
C E F G quadrado(3*sqrt(3),60:)
D G H I quadrado(3,60:)
J = projecção(G,linha(A,B))
desenhar(A,B,C,D)
desenhar(C,E,F,G)
desenhar(D,G,H,I)
desenhar(segmento(G,J),tracejado)
desenhar(segmento(G,A),pontead)
desenhar(segmento(G,B),pontead)
desenhar(segmento(D,E),pontead)
desenhar(segmento(C,I),pontead)

```

Figura 3: xeukleides, modo de edição

O menu «Visualizar» permite passar do modo de edição para o modo de visualização, momento em que o interpretador é chamado a intervir e, caso hajam erros, é dada a indicação da linha onde ocorreu o primeiro erro. Caso não haja nenhum erro é então visualizada a figura.

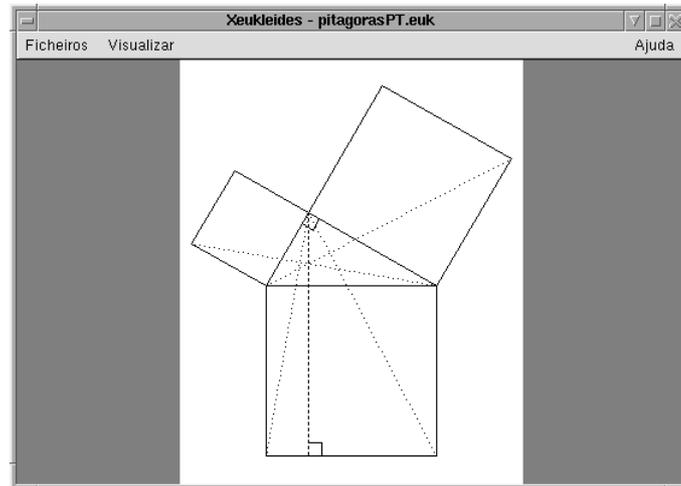


Figura 4: xeukleides, modo de visualização

Como já foi dito o `xeukleides` permite definir figuras interactivas, isto é, figuras em que um dos seus elementos (em geral um ponto) se pode movimentar de acordo com os comandos do utilizador na altura da visualização. Recuperando o exemplo referente ao Teorema de Tales pode-se construir a figura 5 através da seguinte especificação:

```
A=ponto(0,0); B=ponto(6,0)
c=círculo(A,B)
x interactivo(45,-2,0,180,"C",paraolado)
C=ponto(c,x:)
desenhar(c,0:,180:)
desenhar(A,B,C)
marca(A,C,B,recto)
```

o ponto `x` de um valor inicial de 45 vai poder tomar todos os valores de 0 a 180 com saltos de 2, sendo que o seu movimento vai-se processar na «horizontal», a movimentação é possível após o pressionar da tecla `C` pelo utilizador.

Tentando, com um série de imagens, ilustrar o movimento do ponto `C` definido à custa da entidade variável `x`, partindo do ponto inicial e movimentando o ponto para a esquerda através da tecla correspondente ter-se-ia algo como:

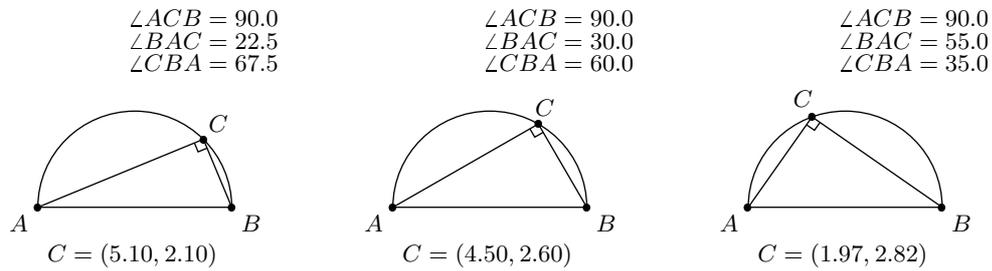


Figura 5: Teorema de Tales - movimentação

### 3.1 Automatização de Demonstrações Geométricas

Os métodos actuais de automatização das demonstrações em Geometria Euclidiana são pouco interessantes do ponto de vista de compreensão da demonstração por parte dos utilizadores. É necessário converter a construção geométrica num conjunto de equações as quais são depois resolvidas por métodos algébricos.

No método apresentado por Chou et. al. [1] os problemas geométricos cujas hipóteses possam ser descritas de forma construtiva são passíveis de demonstrações em termos de equações polinomiais de três tipos de quantidade geométricas; razões entre segmentos de recta, áreas de triângulos, e diferenças Pitagóricas triangulares. Com este método as demonstrações são em geral curtas e num formato que pode ser compreendido por um aluno de matemática

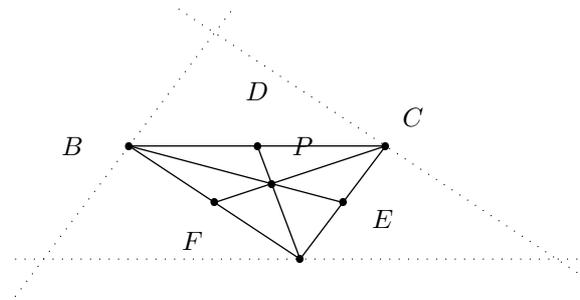


Figura 6: Teorema de Ceva

O trabalho que está a ser desenvolvido tem como objectivo combinar as duas ferramentas de forma a ser possível:

- especificar/visualizar uma dada construção, e após isso proceder à sua demonstração automática.
- visualizar os diferente passos da demonstração automática.

## 4 Conclusões

O sistema `eukleides` é um sistema de fácil utilização, mas poderoso nas suas capacidades. A sua ligação com o sistema `LATEX` dá-nos a possibilidade de facilmente incluir figuras geométricas em textos matemáticos em que a qualidade tipográfica está fora de questão. A sua integração num sistema capaz de proceder à demonstração de resultados geométricos levará à construção de uma ferramenta de apoio muito interessante para o estudo da Geometria Euclidiana.

## Referências

- [1] S.C. Chou, X. S. Gao, and J. Z. Zhang. Automated production of traditional proofs for constructive geometry theorems. In *Proc. of Eighth IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 48–56, 1993.
- [2] Leslie Lamport. *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: A Document Preparation System*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 2nd edition, 1994.
- [3] Christiam Obrecht. Eukleides. <http://perso.wanadoo.fr/obrecht/>.
- [4] Pedro Quaresma. EukleidesPT. <http://gentzen.mat.uc.pt/~EukleidesPT>.
- [5] Pedro Quaresma. *Introdução ao L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*. Escolar Editora, 1996.