Capítulo 2

Conceitos Básicos em Set

2.1 Introdução

A programação funcional assenta em conceitos da Teoria dos Conjuntos, conceitos esses que são melhor estudados no âmbito da categoria Set (MacLane, 1971; Pierce, 1998), a categoria cujos objectos são os conjuntos e cujas setas (morfismos) são as funções entre conjuntos (ver apêndice A).

Um ponto fundamental a destacar é o facto de em Set não ser possível distinguir conjuntos isomórficos, isto é, dois conjuntos A e B para os quais existam funções

$$f : A \longrightarrow B$$

$$g : B \longrightarrow A$$

tais que

$$f \circ g \equiv \mathrm{id}_B \qquad \text{e} \qquad g \circ f \equiv \mathrm{id}_A$$

não são distinguíveis, sendo considerados equivalentes para todos os propósitos da teoria.

Deste modo quando se constrói um conjunto o resultado representa mais do que um conjunto particular: representa também a classe de todos os conjuntos que lhe são isomórficos.

2.2 Objecto Inicial e Objecto Terminal

Em Set pode-se definer o modo como os conjuntos são gerados à custa de um número reduzido de conjuntos atómicos (isto é, conjuntos que não são gerados a partir de qualquer(quaisquer) outro(s) conjunto(s)).

Dois conjuntos atómicos fundamentais:

- O conjunto vazio $\emptyset$;

- O conjunto com um único elemento. É costume representar este conjunto por $\mathbf{1}$ e o único elemento desse conjunto por '$*$'

$$\mathbf{1} = \{*\}$$

Como dissemos $\mathbf{1}$ representa não só o conjunto $\{*\}$ mas também a classe de todos os conjuntos isomórficos com tal conjunto, sendo que "$*$" representa o elemento genérico do conjunto.

Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbf{1}$ definem, para cada outro conjunto X, um par de morfismos:

$$\emptyset_X : \emptyset \longrightarrow X$$

$$\mathbf{1}_X : X \longrightarrow \mathbf{1}$$

morfismos este que são únicos; isto é, dado X, existe uma e uma só função com domínio $\emptyset$ e co-domínio X, e uma e uma só função com domínio X e co-domínio $\mathbf{1}$.

Vejamos que assim é: A função $\mathbf{1}_X : X \longrightarrow \mathbf{1}$ é a função que associa a todos os elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots \in X$, o mesmo (e único) elemento de $\mathbf{1}$, por definição de função toda a função de X para $\mathbf{1}$ tem de associar cada elemento de X ao (único) elemento $*$ de $\mathbf{1}$, ou seja todas as funções de X para $\mathbf{1}$ são iguais à função $\mathbf{1}_X$.

Analogamente, a definição de função diz que:

$$f : X \longrightarrow Y$$

é um sub-conjunto de $X \times Y$ tal que cada elemento $x \in X$ ocorre uma e uma única vez num par $\langle x, f(x) \rangle$. Dado que $\emptyset \times X \cong \emptyset$, o único sub-conjunto possível de $\emptyset \times X$ é o próprio conjunto vazio e portanto existe uma única função possível:

$$\emptyset_X : \emptyset \longrightarrow X$$

A função tem domínio vazio e, consequentemente, a sua imagem é também o conjunto vazio.

Podemos caracterizar as relações descritas entre os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbf{1}$ e as funções $\emptyset_X$ e $\mathbf{1}_X$ sem recorrer aos elementos dos conjuntos, obtendo desta forma uma definição mais genérica. Temos então que para uma qualquer categoria pode-se definir:

Definição 2.1 (Objecto Inicial) *Um objecto* 0*, é dito um objecto inicial se, para qualquer outro objecto* A*, existe um único morfismo de* 0 *para* A*.*

Definição 2.2 (Objecto Terminal) *Um objecto* 1*, é dito um objecto terminal se, para qualquer outro objecto* A*, existe um único morfismo de* A *para* 1*.*

O que acabamos de ver é que em Set o objecto inicial é o conjunto vazio, $\emptyset$, e o objecto terminal é o conjunto $\mathbf{1} = \{*\}$.

Funções com importância particular são as que têm domínio $\mathbf{1}$.

$$f : \mathbf{1} \longrightarrow X$$

Como o domínio tem um único elemento, a imagem terá também um único elemento $f(*)$.

Cada elemento em X, $x \in X$, é susceptível de definir uma função (que representamos por $\hat{x}$)

$$\begin{array}{rccc} \hat{x}: & \mathbf{1} & \longrightarrow & X \\ & * & \longmapsto & x \end{array}$$

Portanto, cada elemento $x \in X$ define uma e uma só função $\hat{x}$ de $\mathbf{1}$ para X tal que $\hat{x}(*) = x$, e inversamente cada função f de $\mathbf{1}$ para X define um e um só $x \in X$, tal que $x = f(*)$. Isto é X é isomórfico com o conjunto de todas as funções de $\mathbf{1}$ para X.

As funções $\hat{x} : \mathbf{1} \longrightarrow X$ que acabamos de definir designam-se pelas *constantes* em X.

Dados dois conjuntos Y e X, a totalidade das funções

$$f : Y \longrightarrow X$$

gera um conjunto que representamos por

$$X^Y$$

e chamamos a "potência Y de X".

Como acabamos de verificar $X^{\mathbf{1}}$ é isomórfico com X

$$X^{\mathbf{1}} \cong X$$

2.3 Produto

Dois conjuntos que não são atómicos (estes conjuntos podem ser construídos a partir de $\emptyset$ e $\mathbf{1}$), mas que têm tal importância que podem ser considerados como tal, são:

- Os números naturais $\mathbb{N}$
- O conjunto I_n dos n primeiros números naturais

$$I_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Dado um conjunto qualquer X, têm importância particular os conjuntos $X^{\mathbb{N}}$ e X^{I_n}.

A representação mais frequente de $X^{\mathbb{N}}$ é

$$X^{\omega}$$

e a de X^{I_n} é, simplesmente,

$$X^n$$

Vejamos as propriedades de tais conjuntos. X^{ω} é o conjunto de todas as funções $s : \mathbb{N} \to X$. Cada função destas é uma sequência $\{s_0, s_1, \ldots\}$ desde que se defina $s_i = s(i)$.

Portanto X^{ω} é o conjunto de todas as sequências contáveis, mas não finitas, de elementos de X.

X^n é o conjunto das funções $t : I_n \to X$. Ou seja $t : \{0, \ldots, n-1\} \to X$, determina um tuplo de n-elementos

$$t = \langle t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \rangle.$$

Portanto X^n é o conjunto de todos os tuplos com exactamente n elementos.

Tuplos podem, também, ser construídos a partir da noção de produto cartesiano.

Dados dois conjuntos X e Y, o produto $X \times Y$ é o conjunto de todos os pares formados por um primeiro elemento que pertença a X e um segundo elemento que pertença a Y.

$$X \times Y = \{\langle a, b \rangle | a \in X \ e \ b \in Y\}$$

Esta definição sugere imediatamente duas funções

$$p_X : X \times Y \longrightarrow X$$

$$p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$$

em que

$$p_X : \langle a, b \rangle \mapsto a$$

$$p_Y : \langle a, b \rangle \mapsto b$$

Isto é, p_X selecciona a componente proveniente de X, enquanto que p_Y selecciona a componente proveniente de Y.

As funções p_X e p_Y são as *projecções* definidas pelo produto.

Consideremos agora duas funções com o mesmo domínio e co-domínio em X e Y

$$f : A \longrightarrow X$$

$$g : A \longrightarrow Y$$

Então, é possível construir uma função $[f,g] : A \longrightarrow X \times Y$ de tal modo que

$$[f,g](x) = \langle f(x), g(x) \rangle$$

Podemos representar estas funções no diagrama comutativo seguinte

$$\begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "{[f,g]}"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Ou seja, temos que;

$$p_X \circ [f,g] = f$$

$$p_Y \circ [f,g] = g$$

Esta relação entre conjuntos e funções entre conjuntos pode-se generalizar obtendo uma definição que não necessita de recorrer aos elementos do conjunto, temos então uma definição genérica para uma qualquer categoria.

Definição 2.3 (Produto Binário) *O produto de dois objectos X e Y é um objecto, representado por $X \times Y$, e um par de morfismos $p_X : X \times Y \to X$ e $p_Y : X \times Y \to Y$ de tal modo que, para todo o par de morfismos*

$$f : A \longrightarrow X \qquad g : A \longrightarrow Y$$

existe um único *morfismo $\mu : A \to X \times Y$ que faz comutar o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\mu"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

O que vimos anteriormente é que, em Set, o produto de dois conjuntos é dado pelo produto cartesiano de conjuntos.

Esta definição é muito mais poderosa que a definição anterior porque não faz qualquer referência à noção de elemento de um conjunto o que permite a sua generalização a outras situações.

Note-se que a definição assenta completamente em morfismos e na unicidade de certos morfismos. Deste modo segue o processo usado para definir constantes e elementos terminais e iniciais.

O produto, tal como o elemento terminal $\mathbf{1}$, define-se através da unicidade de morfismos que têm por destino o conjunto em questão. Na definição de $\mathbf{1}$ existe, para cada A, um único $\mathbf{1}_A : A \to \mathbf{1}$.

No produto, cada triplo

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

gera um único $\mu : A \to X \times Y$.

O elemento terminal é, um conjunto, $\mathbf{1}$, e uma propriedade, que a cada outro conjunto, A, associa uma função $\mu : A \to \mathbf{1}$.

O produto é um triplo, conjunto e dois morfismos,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X \\ X \times Y \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

e uma regra que, a cada outro triplo

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

gera um morfismo

$$A \xrightarrow{\mu} X \times Y$$

Existem, portanto, semelhanças claras entre a noção de produto e de elemento terminal.

De facto, $\mathbf{1}$ é uma espécie de "produto de zero factores", o que pode ser comprovado pelo facto de ser o elemento neutro do produto binário.

Isto é

$$\mathbf{1} \times X \cong X \times \mathbf{1} \cong X$$

Pode-se verificar esta afirmação construindo os diagramas que definem o produto e o par de funções $\mathrm{id_X} : X \to X$ e $\mathbf{1}_X : X \to \mathbf{1}$.

O diagrama introduz $\mu : X \to X \times \mathbf{1}$, que é a única função que faz comutar o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} X & X \times \mathbf{1} \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_{\mathbf{1}}"] & \mathbf{1} \\ & X \arrow[ul, "\mathrm{id}_X"] \arrow[u, dashed, "\mu"] \arrow[ur, "\mathbf{1}_X"'] & \end{tikzcd}$$

Temos

$$p_{\mathbf{1}} \circ \mu = \mathbf{1}_X \qquad p_X \circ \mu = \mathrm{id}_X$$

Suponhamos que construímos o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
X & X \times \mathbf{1} \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_1"] & \mathbf{1} \\
& X \times \mathbf{1} \arrow[ul, "p_X"] \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}_{X\times\mathbf{1}}"'] \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Pela propriedade universal $\mathrm{id}_{X\times\mathbf{1}}$ é o único morfismo que faz comutar este diagrama. No entanto ele pode ser representado de outro modo.

$$
\begin{tikzcd}
X & X \times \mathbf{1} \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_1"] & \mathbf{1} \\
& X \arrow[ul, "\mathrm{id}_X"] \arrow[u, dashed, "\mu"] \arrow[ur, "\mathbf{1}_X"'] & \\
& X \times \mathbf{1} \arrow[uul, "p_X"] \arrow[u, "p_X"] \arrow[uur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Como $\mathrm{id}_{X\times\mathbf{1}}$ é único e $\mu \circ p_X$ também faz comutar o diagrama, temos de ter

$$\mathrm{id}_{X\times\mathbf{1}} = \mu \circ p_X$$

que, com a identidade

$$\mathrm{id}_X = p_X \circ \mu$$

prova que X e $X \times \mathbf{1}$ são isomórficos.

Esta demonstração recorre à definição rigorosa de produto; uma demonstracção mais intuitiva (mas menos rigorosa) recorre à noção de produto como "conjunto de pares".

O elemento genérico de $X \times \mathbf{1}$ tem a forma

$$\langle a, * \rangle \qquad \text{com } a \in X$$

uma vez que '$*$' é o único elemento de $\mathbf{1}$, para cada $a \in X$ existe um único par $\langle a, * \rangle$ cuja primeira componente é a. Logo X e $X \times \mathbf{1}$ estão em correspondência de 1 para 1.

2.4 Equalizador

Uma outra forma de construir conjuntos parte do seguinte problema.

Dadas duas funções com o mesmo domínio e co-domínio

$$f, g : X \longrightarrow Y$$

determinar "o maior" sub-conjunto de X onde f e g coincidam.

Isto é, determinar

$$\{a \in X \mid f(a) = g(a)\}$$

Tal conjunto chama-se *equalizador* de f e g.

Representemos por $\overline{X}$ tal conjunto, $\overline{X}$ está contido em X e portanto é possível definir uma função injectiva

$$e : \overline{X} \longrightarrow X$$

definida por

$$e(a) = a \qquad \forall a \in X$$

Em inglês tais funções designam-se por "embeding" o que, em português, se pode traduzir por *"imersão"*. São as funções que identificam um elemento de um sub-conjunto com o mesmo elemento no conjunto maior.

Todas estas funções são injectivas e, vice-versa, uma vez que a nossa teoria não distingue conjuntos isomorfos entre si, toda a função injectiva pode ser vista como representando uma imersão.

Deste modo, em Set, funções injectivas representam a noção de sub-conjuntos.

Se $\overline{X}$ for o equalizador de f e g

$$\overline{X} \xrightarrow{e} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

então, pela definição, $f \circ e = g \circ e$, porque $f(a) = g(a)$, para todo o $a \in X$.

Suponhamos agora que existe um quarto conjunto Z e uma função $h : Z \longrightarrow X$ de tal modo que $f \circ h = g \circ h$

Isto significa que

$$f(h(b)) = g(h(b)) \qquad \forall b \in Z$$

Uma vez que $\overline{X}$ contém todos os $a \in X$ tais que $f(a) = g(a)$, então $h(b)$ é um elemento de $\overline{X}$.

É então possível identificar uma função, que é única, $\overline{h} : Z \longrightarrow \overline{X}$ que transforma $b \in Z$ em $h(b)$ visto como elemento de $\overline{X}$.

Temos então a seguinte definição rigorosa de equalizador,

Definição 2.4 (Equalizador) *Dadas dois morfismos $f, g : X \to Y$, o seu equalizador é um objecto $\overline{X}$ e um morfismos injectivo $e : \overline{X} \to X$ de tal modo que $f \circ e = g \circ e$, e para toda o outro morfismo $h : Z \to X$ tal que $f \circ h = g \circ h$ existe um único morfismo $\overline{h} : Z \longrightarrow \overline{X}$ tal que $h = e \circ \overline{h}$, isto é o seguinte diagrama comuta,*

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Z \arrow[u, dashed, "\overline{h}"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

2.5 Quadrado Cartesiano

Este tipo de construção pode ser estendido para pares de funções que têm o mesmo co-domínio mas não o mesmo domínio

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Z \\
P \arrow[u, "n"] \arrow[r, "m"'] & Y \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Em que o conjunto P e o par de funções n e m são tais que o diagrama comuta

$$f \circ n = g \circ m$$

Adicionalmente, se existir outro conjunto P' e funções n', m' tais que

$$f \circ n' = g \circ m'$$

deve existir um único $h : P' \longrightarrow P$ tal que $n' = n \circ h$ e $m' = m \circ h$.

Ao triplo, conjunto P e morfismos (n,m) chamamos o quadrado cartesiano ("pull-back") das funções f e g.

Definição 2.5 (Quadrado Cartesiano) *Dadas dois morfismos $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$, o seu quadrado cartesiano é um objecto P e dois morfismos injectivos $n : P \rightarrow X$ e $m : P \rightarrow Y$ de tal modo que $f \circ n = g \circ m$, e para todo o outro objecto P' e para todo o par de morfimos $n' : P' \rightarrow X$ e $m' : P' \rightarrow Y$ tal que $f \circ n' = g \circ m'$ existe um único morfismo $h : P' \longrightarrow P$ tal que o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] & Z \\
 & P \arrow[u, "n"'] \arrow[r, "m"] & Y \arrow[u, "g"'] \\
P' \arrow[uur, "n'"] \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "m'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Em SET o quadrado cartesiano pode ser sempre construído do modo seguinte: Tomemos o produto cartesiano $X \times Y$ e, dentro deste conjunto, tomemos o sub-conjunto formado pelos pares $(a, b) \in X \times Y$ tais que $f(a) = g(b)$

$$P = \{(a, b) \in X \times Y | f(a) = g(b)\}$$

Como $P \subseteq X \times Y$ existe uma imersão $e : P \longrightarrow X \times Y$. Definindo $n = p_X \circ e$ e $m = p_Y \circ e$, vemos que, para $(a, b) \in P$, $f \circ n(a, b) = f(a) = g(b) = g \circ m(a, b)$.

Deste modo (P, n, m) definem o desejado quadrado cartesiano.

A construção indica também, que o quadrado cartesiano. não é mais do que a combinação apropriada de produto e equalizadores.

As construções que foram discutidas atrás (elemento terminal, produto e equalizadores) tomam o nome de *limites*; de uma modo geral, qualquer combinação (finita ou não finita) destas construções básicas toma o nome de limite.

Uma das propriedades fundamentais de Set é a de ser fechada a todos os limites, ou seja, qualquer combinação finita ou não finita, destes limites básicos produz sempre como resultado conjuntos e funções entre conjuntos.

Um exemplo simples de combinação de limites básicos é o quadrado cartesiano que, como vimos, é construído com um produto e com um equalizador.

Podem também ser construídos limites que resultam de combinações não finitas destas construções básicas (limites não finitos). Por exemplo, dada uma sucessão de conjuntos $X_0, X_1, X_2, \ldots$ está bem definido o produto de todos eles $\prod_{i=0}^{\infty} X_i$.

2.6 Co-produto

Existe uma outra família de construções de conjuntos a que damos o nome de *co-limites* e que são, duais dos limites atrás referidos.

Essa dualidade exprime-se simplesmente, invertendo o sentido de todas as setas nas definições.

Para esclarecer esta afirmação consideremos a noção de elemento inicial:

Elemento Inicial, $\emptyset$, é um conjunto tal que para qualquer outro conjunto, X, existe um único morfismo $\emptyset_X : \emptyset \to X$.

Note-se que a definição só difere da definição de elemento terminal pelo sentido da função. Por este motivo diremos que a noção de elemento inicial é *dual* da noção de elemento terminal.

Esta dualidade sugere o modo como deve ser definido o conceito dual do de produto , a que chamaremos *co-produto*.

Definição 2.6 (Co-produto Binário) *O co-produto de dois objectos X e Y é um objecto, representado por $X+Y$, e um par de morfismos $i_X : X \to X+Y$ e $i_Y : Y \to X+Y$ de tal modo que, para todo o objecto A e todo o par de morfismos $f : X \longrightarrow A$ $\quad g : Y \longrightarrow A$ existe* um único *morfismo $\mu_A : X+Y \to A$ que faz comutar o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & X+Y \arrow[d, dashed, "\mu_A"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Do mesmo modo que o morfismo $\mu_A : A \to X \times Y$, que é determinado pela propriedade universal do produto tinha uma representação apropriada

$$[f, g]$$

o morfismo $\mu_A : X+Y \to A$ que é determinado pela propriedade universal do co-produto tem uma representação especial

$$\{f, g\}$$

Representando μ_A por $\{f, g\}$, os diagramas comutativos de figura anterior designam as igualdades seguintes

$$\{f, g\} \circ i_X = f$$

$$\{f, g\} \circ i_Y = g$$

Esta é a definição formal de co-produto que resulta da dualidade de definição de produto. No entanto, esta definição não nos indica como construir o co-produto na categoria SET. É então conviniente encontrar uma outra forma de caracterizar o co-produto.

Antes porém, vamos verificar que a função i_X (e também, a função i_Y) é injectiva.

A definição usual de função injectiva diz-nos que, para quaisquer constantes $a, b \in X$

$$i_X(a) = i_X(b) \quad \text{implica} \quad a = b$$

Na nossa notação constantes a, b são funções

$$\mathbf{1} \underset{\hat{b}}{\overset{\hat{a}}{\rightrightarrows}} X$$

e, assim, esta propriedade exprime-se por

$$i_X \circ \hat{a} = i_X \circ \hat{b} \quad \text{implica} \quad \hat{a} = \hat{b}$$

Suponhamos então que se verifica $i_X \circ \hat{a} = i_X \circ \hat{b}$, e vamos demonstrar que tal implica $\hat{a} = \hat{b}$

Tomemos qualquer função $\alpha : Y \to X$ e o triplo $\langle X, \mathrm{id}_X, \alpha \rangle$ indicados no seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, shift left, "\hat{a}"] \arrow[r, shift right, "\hat{b}"'] & X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & X+Y \arrow[d, dashed, "\{\mathrm{id}_\mathrm{X}, \alpha\}"'] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "\alpha"] \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

Então existe $\{\mathrm{id}_\mathrm{X}, \alpha\}$ que faz comutar os diagramas; logo

$$\{\mathrm{id}_\mathrm{X}, \alpha\} \circ i_X = \mathrm{id}_\mathrm{X}$$

Compondo com $\hat{a}$ e $\hat{b}$ temos

$$\{\mathrm{id}_X, \alpha\} \circ i_X \circ \hat{a} = \mathrm{id}_X \circ \hat{a} = \hat{a}$$

$$\{\mathrm{id}_X, \alpha\} \circ i_X \circ \hat{b} = \mathrm{id}_X \circ \hat{b} = \hat{b}$$

Como, por hipóteses, $i_X \circ \hat{a} = i_X \circ \hat{b}$, os lados esquerdos de ambas as equações são iguais e consequentemente, teremos $\hat{a} = \hat{b}$. Portanto i_X é injectiva.

De igual modo se prova que i_Y também é injectiva.

Vimos atrás que a existência de uma função injectiva

$$i : X \longrightarrow X'$$

corresponde à afirmação de que X é isomórfico com um sub-conjunto de X'.

Assim, a menos de um isomorfismo, a afirmação $i : X \to X'$ é injectiva é equivalente a $X \subseteq X'$

Deste modo concluímos que, no co-produto $X + Y$, tanto X como Y são, a menos de isomorfismos, sub-conjuntos do co-produto.

Serão tais sub-conjuntos disjuntos?

Suponhamos que existia um ponto comum a tais sub-conjuntos. Então existem $a \in X$ e $b \in Y$, tais que

$$i_X(a) = i_Y(b)$$

Substituindo as constantes pelas funções respectivas $\hat{a} : \mathbf{1} \to X$ e $\hat{b} : \mathbf{1} \to Y$, obtemos um diagrama comutativo tal como se indica.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[dl, "\hat{a}"'] \arrow[dr, "\hat{b}"] & \\
X \arrow[r, "i_X"'] & X+Y & Y \arrow[l, "i_Y"]
\end{tikzcd}$$

Uma vez que as constantes $\hat{a}$, $\hat{b}$ são funções injectivas temos um par de funções injectivas

$$i_X \circ \hat{a} \qquad \text{e} \qquad i_Y \circ \hat{b}$$

que coincidem. Uma vez que i_X e i_Y são sempre morfismos distintos (e injectivos) esta equivalência não se pode nunca verificar.

Deste modo os sub-conjuntos de $X + Y$ isomorfos com X e com Y, são disjuntos.

Uma última questão: existirá algum elemento de $X + Y$ que não seja elemento de um deste sub-conjuntos?

Equivalentemente, será que

$$X + Y = i_X(X) \cup i_Y(Y)$$

Representemos por U o conjunto $i_X(X) \cup i_Y(Y)$: a união dos dois sub-conjunto. Como U é sub-conjunto de $X + Y$ existe uma função injectiva

$$e : U \longrightarrow X + Y$$

Sejam $j_X : X \to U$, $j_Y : Y \to U$ as funções injectivas que dão em U os mesmos resultados que em $X + Y$ dão i_X e i_Y. Ou seja

$$e \circ j_X = i_X \qquad e \circ j_Y = i_Y$$

Temos então

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "j_X"'] & X+Y \arrow[d, shift right, "\{j_X, j_Y\}"'] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "j_Y"] \\
& U \arrow[u, shift right, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

Ou seja,

$$\{i_X, i_Y\} = \{e \circ j_X, e \circ j_Y\} = e \circ \{j_X, j_Y\}$$

Como $\mathrm{id}_{X+Y} = \{i_X, i_Y\}$ temos

$$\mathrm{id}_{X+Y} = e \circ \{j_X, j_Y\}$$

Uma vez que e é injectiva, teremos também

$$\{j_X, j_Y\} \circ e = \mathrm{id}_U$$

Consequentemente $X + Y$ e U são isomorfos. Em conclusão

$$X + Y \cong i_X(X) \cup i_Y(Y)$$

Estas propriedades permitem-nos caracterizar heuristicamente o co-produto $X + Y$.

Tomemos duas cópias disjuntas do conjunto X e do conjunto Y; isto é, tomemos dois conjuntos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ isomórficos com X e Y, respectivamente, tais que

$$\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$$

O co-produto será a união destes dois conjuntos

$$X + Y \cong \overline{X} \cup \overline{Y}$$

Obviamente que, como sempre, esta definição caracteriza o co-produto a menos de um isomorfismo.

A criação de cópias $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ corresponde à definição de dois isomorfismos

$$X \xrightarrow{\alpha} \overline{X} \qquad \overline{Y} \xleftarrow{\beta} Y$$

com as imersões $e_X : \overline{X} \to \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $e_Y : \overline{Y} \to \overline{X} \cup \overline{Y}$ construímos as imersões i_X e i_Y que caracterizam o co-produto

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "i_X"'] & \overline{X} \arrow[dr, "e_X"] & & \overline{Y} \arrow[dl, "e_Y"'] & Y \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dll, "i_Y"] \\
& & \overline{X} \cup \overline{Y} & &
\end{tikzcd}$$

$$i_X = e_X \circ \alpha \qquad i_Y = e_Y \circ \beta$$

<u>Nota:</u> em Set noções de função injectiva e de função sobrejectiva podem ser definidas sem recorrer à noção de elemento de conjunto, do modo seguinte:

Definição 2.7 (Monomorfismo) *Um monomorfismo $m : X \to Y$ é uma morfismo que, para todo o par de morfismos $f, g : A \to X$ tais que $m \circ f = m \circ g$, temos necessariamente $f = g$.*

Definição 2.8 (Epimorfismo) *Um epimorfismo $e : Y \to X$ é um morfismo que, para todo o par de morfismos $f, g : X \to A$ tais $f \circ e = g \circ e$, temos necessariamente $f = g$.*

A construção mostra que as noções de monomorfismo e epimorfismo são duais: basta inverter o sentido das setas para passar de uma definição para outra.

Deste modo, se no co-produto os morfismos $i_X : X \to X + Y$ são monomorfismos, então, usando simplesmente a dualidade, concluímos que no produto $X \times Y$ as projecções $p_X : X \times Y \to X$ são epimorfismos.

Monomorfismos e Epismorfismos em Set são dados pelas funções injectivas e sobrejectivas, respectivamente.

Alguns exemplos de co-produtos:

O conjunto dos booleanos $\mathbb{B} = \{\text{verd}, \text{falso}\}$ pode ser identificado com $\mathbf{1} + \mathbf{1}$.

Basta definir os dois morfismos injectivos que determinam as constantes *verd* e *falso* em $\mathbb{B}$.

$$\begin{array}{rccl} \hat{V}: & \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & * & \longmapsto & \text{verd} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \hat{F}: & \mathbf{1} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & * & \longmapsto & \text{falso} \end{array}$$

e notar que

$$\hat{V}(\mathbf{1}) \cap \hat{F}(\mathbf{1}) = \emptyset \quad \text{e} \quad \mathbb{B} = \hat{V}(\mathbf{1}) \cup \hat{F}(\mathbf{1})$$

$$\mathbb{B} \cong \mathbf{1} + \mathbf{1}$$

Do mesmo modo que com qualquer produto finito se obtém sempre um conjunto, também a classe dos conjuntos é fechada em relação a qualquer co-produto (não finito ou finito).

Se tomarmos uma qualquer sucessão de conjuntos $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ define-se o co-produto de todos estes conjuntos $\sum_{i=0}^{\infty} X_i$.

Usando co-produtos infinitos podemos dizer que os números naturais $\mathbb{N}$ podem ser definidos como o co-produto

$$\mathbb{N} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} + \cdots$$

De facto, cada um dos números naturais gera um monomorfismo

$$\hat{0}: \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \hat{1}: \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \ldots \quad \hat{n}: \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{N}$$

As imagens destes morfismos são sempre disjuntas

$$\hat{n}(*) = \{n\} \qquad \hat{m}(*) = \{m\}$$

para $n \neq m \quad \hat{n}(*) \cap \hat{m}(*) = \emptyset$ e tem-se

$$\hat{0}(*) \cup \hat{1}(*) \cup \cdots \cup \hat{n}(*) \cup \cdots = \mathbb{N}$$

Um outro exemplo de co-produto não finito é o usado para a construção de X^*;

Define-se X^* como o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de X.

Como sabemos X^n representa, não só o produto de n vezes X $(X \times X \times \cdots \times X)$ como também o conjunto de todas as sequências com exactamente n elementos de X.

Portanto X^n identifica-se como um sub-conjunto de X^* e, assim, existe um monomorfismo de imersão

$$e_n : X^n \longrightarrow X^*$$

Como duas sequências com comprimentos distintos nunca podem coincidir, temos, para todos os $n \neq m$

$$e_n(X^n) \cap e_m(X^m) = \emptyset$$

Por outro lado, qualquer elemento de X^* tem um comprimento finito e, assim, existirá um e um só n tal que X^n contém esse elemento

$$X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} e_n(X^n)$$

Consequentemente

$$X^* = \mathbf{1} + X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots$$

Neste co-produto usamos, como é frequente, $\mathbf{1}$ como equivalente a X^0, e X como equivalente a X^1.

Existe outro modo de representar estes dois últimos co-produtos não finitos.

Em relação aos números naturais $\mathbb{N}$ notemos a existência de dois monomorfismos

$$\hat{0} : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

sendo s a função sucessor.

Note-se que a imagem destes dois morfismos é disjunta: um natural ou é zero ou então é sempre sucessor de outro natural mas nunca simultaneamente. Portanto

$$\hat{0}(\mathbf{1}) \cap s(\mathbb{N}) = \emptyset$$

$$\hat{0}(\mathbf{1}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$$

Portanto estamos em condições de afirmar que $\mathbb{N}$ é isomorfo com $\mathbf{1} + \mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \cong \mathbf{1} + \mathbb{N}$$

Temos, basicamente, uma equação que define $\mathbb{N}$. Isto é, pode-se definir os números naturais como o conjunto que é solução desta equação. $\mathbb{N}$ é assim caracterizado por dois monomorfismos

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\hat{0}} \mathbb{N}, \qquad \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$$

e por um propriedade fundamental.

Suponhamos um outro conjunto X e um par de morfismos

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} X$$

então existirá um único morfismo $\gamma : \mathbb{N} \to X$ que faz comutar o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\hat{0}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathbb{N} \arrow[d, "\gamma"] \\
& X \arrow[r, "\beta"'] & X
\end{tikzcd}$$

Heuristicamente, γ é determinado por

$$\gamma(0) = \alpha(*)$$

$$\gamma(n+1) = \beta(\gamma(n))$$

O conjunto X^* das sequências finitas pode também ser definido por uma equação.

Representemos por ϵ a sequência vazia. Esta constante define uma função injectiva

$$\hat{\epsilon} : \mathbf{1} \longrightarrow X^*$$

Uma outra função pode ser representada por "$\cdot$" e constrói uma sequência a partir de um primeiro elemento e do "resto" da sequência

$$\cdot : X \times X^* \longrightarrow X^*$$

A operação "$\cdot$" constrói as sequências não vazia; deste modo as imagens destas duas funções são disjuntas. A função "$\cdot$" é também injectiva uma vez que

$$\langle x \cdot \alpha \rangle = \langle y \cdot \beta \rangle \quad \text{implica} \quad x = y \quad \text{e} \quad \alpha = \beta$$

O primeiro elemento e o resto de uma sequência caracterizam-na completamente.

Finalmente vemos que as imagens de ϵ e "$\cdot$" geram, por união, o conjunto global X^*, uma vez que uma sequência ou é vazia ou é construída a partir de "$\cdot$"

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{1}) \cap \cdot(X \times X^*) = \emptyset$$

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{1}) \cup \cdot(X \times X^*) = X^*$$

Portanto

$$X^* \cong \mathbf{1} + X \times X^*$$

2.7 Co-equalizador

O último co-limite básico que falta examinar é o dual do equalizador.

Definição 2.9 (Co-equalizador) *Dadas dois morfismos $f, g : X \to Y$, o seu co-equalizador é um objecto $\overline{Y}$ e um epimorfismo $e : Y \to \overline{Y}$ de tal modo que $e \circ f = e \circ g$, e para todo o outro morfismo $h : Y \to A$ tal que $h \circ f = h \circ g$ existe um único morfismo $\overline{\mu}_A : \overline{Y} \longrightarrow A$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "h"'] & \overline{Y} \arrow[d, dashed, "\overline{\mu}_A"] \\ & & A \end{tikzcd}$$

O co-equalizador é uma construção ligada à construção de classes de equivalência: Dois pontos $a, b \in Y$ consideram-se equivalentes se existe um ponto $c \in X$ tal que $a = f(c)$ e $b = g(c)$

O conjunto $\overline{Y}$ não é mais que o conjunto das classes de equivalência determinadas por esta relação e $e : Y \to \overline{Y}$ é a respectiva projecção canónica.

2.8 Quadradro Co-cartesiano

A combinação de um co-produto e um co-equalizador dá origem a uma construção chamada Quadrado Co-cartesiano ("push-out"). Esta construção é dual do quadrado cartesiano. Temos então o caso de duas funções com o mesmo domínio mas co-domínios diferentes, sendo o seu quadrado co-cartesiano dado pelo conjunto e pelas funções que vão "fechar o quadrado", de forma a que havendo um outro conjunto e outro par de funções nas mesmas condições, vai existir uma função, única, que vai do primeiro para o segundo.

Temos então a seguinte definição.

Definição 2.10 (Quadrado Co-cartesiano) *Dados dois morfismos $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$, o seu quadrado co-cartesiano é um objecto P e dois epimorfismos $r : X \to P$ e $s : Y \to P$ de tal modo que $r \circ f = s \circ g$, e para todo o outro objecto P' e para todo o par de morfismos $r' : X \to P'$ e $s' : Y \to P'$ tal que $r' \circ f = s' \circ g$ existe um único morfismo $h : P \longrightarrow P'$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
 & & P' \\
X \arrow[r, "r"] \arrow[urr, "r'"] & P \arrow[ur, dashed, "h"] & \\
Z \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & Y \arrow[u, "s"] \arrow[uur, "s'"] &
\end{tikzcd}$$

Em SET quadrado co-cartesiano constrói-se do modo seguinte: Constrói-se em primeiro lugar o co-produto $X + Y$ e, em seguida, o co-equalizador das funções $i_X \circ f$ e $i_Y \circ g$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "i_X"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"] & X + Y \arrow[r, "\delta"] & \Delta \\
 & Y \arrow[u, "i_Y"] &
\end{tikzcd}$$

Basicamente isto significa que, no co-produto, consideramos equivalentes um ponto $a \in i_X(X)$ e um ponto $b \in i_Y(Y)$ que sejam imagens, por f e g do mesmo ponto $c \in A$.

$$a \cong b \quad \text{se} \quad \exists c \quad \text{tal que} \quad f(c) = a \quad \text{e} \quad g(c) = b$$

2.9 Exponenciação

Uma construção de conjuntos, que sai fora da família dos limites e da família dos co-limites, é a exponenciação de conjuntos que se define por

X^Y é o conjunto de todas as funções $f : Y \to X$

Vimos já que

$$X^{\mathbf{1}} \cong X$$

e que

$$X^{\emptyset} \cong \mathbf{1}$$

A propriedade fundamental da exponenciação exprime-se por

Definição 2.11 (Propriedade Universal da Exponenciação) *Existe um morfismos $ev : Z^Y \times Y \to Z$ (chamada morfismos de aplicação, em inglês "evaluation") de tal modo que, para qualquer morfimso $f : X \to Z^Y$ existe um único morfismo $\overline{f} : X \times Y \to Z$ que faz comutar o diagrama seguinte.*

$$
\begin{tikzcd}
Z^Y \times Y \arrow[r, "ev"] & Z & Z^Y \\
 & X \times Y \arrow[ul, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[u, dashed, "\overline{f}"'] & X \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Nota: A função $f \times \mathrm{id} : X \times Y \to Z^Y \times Y$ é a função que ao par $\langle a, y\rangle \in X \times Y$ associa o par $\langle f(a), y\rangle$; isto é, a primeira componente é transformada por f enquanto que a segunda não se altera.

Note-se que a propriedade diz "para cada f existe um único $\overline{f}$". Analogamente se poderia dizer "para cada $\overline{f}$ existe um único f".

Em inglês, à operação que, a partir de $\overline{f}$, produz f, é costume chamar *currying* e, à operação inversa (de f para $\overline{f}$), *uncurrying.*

Tomemos, como exemplo, a adição de números naturais

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Fixemos um qualquer valor para a primeira parcela; por exemplo, 0. Então define-se uma função, que podemos representar por

$$+_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

tal que $+_0(n) = 0 + n$.

Como $+_0$ é uma função de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$, podemos vê-la como um elemento de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Identicamente, define-se a função

$$+_1(n) = 1 + n$$

Temos também $+_1 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Deste modo, para cada $a \in \mathbb{N}$, define-se $+_a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de tal modo que

$$+_a(n) = a + n$$

A associação de uma $a \in \mathbb{N}$ arbitrário a um elemento $+_a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ determina uma função que podemos representar por $\widetilde{+}$

$$\widetilde{+} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

tal que $\widetilde{+}(a) = +_a$ e, consequentemente

$$\widetilde{+}(a)(n) = a + n = +(a, n)$$

A função $\widetilde{+}$ será o "currying" de $+$.

A função "evaluation" $ev : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ não é mais, neste caso, do que a função que toma um elemento $+_a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e um argumento dessa função $n \in \mathbb{N}$ e dá o resultado da aplicação de $+_a$ a n

$$ev(+_a, n) = +_a(n) = a + n$$

O diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \arrow[r, "ev"] & \mathbb{N} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[ul, "\widetilde{+} \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}}"] \arrow[u, "+"'] & \mathbb{N} \arrow[u, dashed, "\widetilde{+}"']
\end{tikzcd}$$

pode, agora, ser visto em termos de elementos:

$$\begin{tikzcd}
\langle +_a, n \rangle \arrow[r, "ev"] & a + n & +_a \\
& \langle a, n \rangle \arrow[ul, "\widetilde{+} \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}}"] \arrow[u, "+"'] & a \arrow[u, dashed, "\widetilde{+}"']
\end{tikzcd}$$

Ao par $\langle a, n \rangle$ a função $+$ associa $a+n$. A este mesmo par $\widetilde{+} \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ associa o par $\langle +_a, n \rangle$ porque $\widetilde{+}$ associa a a $+_a$ e $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ não modifica n. Logo ev associa a esse par o mesmo valor $a + n$, provando que o diagrama comuta.

No caso geral, qualquer função binária

$$\overline{f} : A \times Y \longrightarrow X$$

tem um único "currying"

$$f : A \longrightarrow X^Y$$

A função aplicação $ev : X^Y \times Y \rightarrow X$ não é mais que a função que aplica um elemento $h \in X^Y$ a um seu argumento $y \in Y$

$$ev(h, y) = h(y)$$

A propriedade fundamental exprime-se tomando elementos arbitrários

$$\langle a, y \rangle \in A \times Y$$

$$\begin{tikzcd}
\langle f(a), y \rangle \arrow[r, "ev"] & \begin{array}{c} f(a)(y) \\ \equiv \\ \overline{f}(a,y) \end{array} & f(a) \\
& \langle a, y \rangle \arrow[ul, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[u, "\overline{f}"'] & a \arrow[u, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

A relação fundamental entre f e $\overline{f}$ exposta neste diagrama é que

$$\overline{f}(a,y) = f(a)(y) \qquad \forall a \in A, y \in Y$$

As definições formais de limite, co-limite e exponenciação de conjuntos permite provar as seguintes propriedades. Por simplicidade, no entanto iremos recorrer apenas às definições heurísticas destes conceitos

1. $$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C$$

   O elemento genérico de $A \times (B+C)$ é um par $\langle a, x\rangle$ em que o primeiro elemento a percorre A e o elemento x percorre uma cópia isomórfica de B e uma cópia isomórfica de C.

   Quando x percorre a cópia de B, gera $A \times B$; quando percorre a cópia de C gera $A \times C$. Os dois conjuntos assim gerados são disjuntos.

   Portanto o co-produto $A \times B + A \times C$ é bem definido e coincide com $A \times (B + C)$.

2. $$A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

   O elemento genérico de A^{B+C} é a função

   $$f : B + C \longrightarrow A$$

   A definição de co-produto gera imediatamente um par de funções

   $$f_1 = f \circ i_B \qquad f_2 = f \circ i_C$$

   de tal modo que $f = \{f_1, f_2\}$

   Identicamente cada par de funções nestas circunstâncias gera, como sabemos, um único $f : B + C \to A$. Portanto o conjunto de funções $f : B + C \to A$ é isomórfico com o conjunto de pares de funções $f_1 : B \to A$ e $f_2 : C \to A$; logo

   $$A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

3. $$A^{B\times C} \cong \left(A^B\right)^C$$

   O diagrama fundamental de exponenciação diz que existe uma relação de um para um entre as funções $f : C \to A^B$ (os elementos de $\left(A^B\right)^C$) e as funções $\overline{f} : B \times C \to A$, que são os elementos de $A^{B\times C}$.

   A propriedade fica assim provada.