Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

Duração: 2h30m **Exame (Época Normal)** 18/01/2012

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. (a) Mostre que $1 \pm i$ são elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}[i]$.
   (b) Mostre que $2 \in \mathbb{Z}[i]$ não é irredutível em $\mathbb{Z}[i]$ apesar de o ser em $\mathbb{Z}$.
   (c) Calcule $\mathrm{mdc}(2, 3+i)$ em $\mathbb{Z}[i]$.
2. Seja D um domínio de factorização única. Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in D$, se $1 \in \mathrm{mdc}(a, b)$ e $a \mid bc$ então $a \mid c$.
3. Quando é que um domínio de integridade se diz um domínio euclidiano? Prove que todo o domínio euclidiano é um domínio de ideais principais.
4. Seja M um A-módulo (A: anel comutativo) e $v \in M$. Mostre que:
   (a) $T = \{av + nv \mid a \in A, n \in \mathbb{Z}\}$ é um submódulo de M.
   (b) Se A é unitário, $T = \{av \mid a \in A\}$.
5. Seja D um domínio de ideais principais e p_1, p_2, p_3, p_4 elementos primos de D. Determine as decomposições do D-módulo
$$\frac{D}{\langle p_1\, p_2^2\, p_3\rangle} \oplus \frac{D}{\langle p_1\, p_2^3\, p_3^2\, p_4\rangle} \oplus \frac{D}{\langle p_1^3\, p_2^2\, p_4^5\rangle}$$
em factores cíclicos invariantes e em factores cíclicos primários.
6. Seja $f\colon M \to M$ um homomorfismo de A-módulos. Mostre que se $f \circ f = f$ então M é soma directa interna de $N(f)$ e $Im(f)$.
7. Seja A um anel comutativo.
   (a) Quando é que se diz que um A-módulo é noetheriano?
   (b) Mostre que um A-módulo é noetheriano se todos os seus submódulos forem de tipo finito.
   (c) Seja N um submódulo de um A-módulo M. Prove que se M é noetheriano, então N e M/N também são noetherianos.
