Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra Comutativa**

Duração: 2h00m **Frequência** 16/12/2011

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. Determine:
   (a) As unidades do domínio $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.
   (b) A decomposição do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{108}$ em factores cíclicos invariantes e em factores cíclicos primários.
   (c) Os ideais primários de $\mathbb{Z}$.
   (d) $\sqrt{\langle a \rangle}$ para qualquer $a \in \mathbb{Z}$.
   (e) O radical do ideal $I = \langle x^2, xy \rangle$ de $K[x, y]$.
   (f) $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ (para o ideal I da alínea anterior).
2. Seja D um domínio de integridade e M um D-módulo.
   (a) Como se define $\mathrm{Tor}(M)$?
   (b) Mostre que:
      (i) $\mathrm{Tor}(M)$ é um submódulo de M.
      (ii) Se M é livre então é livre de torção.
      (iii) $M/\mathrm{Tor}(M)$ é um D-módulo livre de torção.
3. Seja M um módulo noetheriano e $f : M \to M$ um homomorfismo sobrejectivo. Mostre que:
   (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, f^n é um homomorfismo sobrejectivo e $N(f^n) \subseteq N(f^{n+1})$.
   (b) Existe um natural k tal que $N(f^k) = N(f^{k+1})$.
   (c) f é um isomorfismo.
