Exercício da página 16: *Se D é um domínio euclidiano com função euclidiana δ então*

$$\widetilde{\delta}(a) = \min_{b \neq 0} \delta(ab)$$

define uma função euclidiana em D com as seguintes propriedades:

(1) $\widetilde{\delta}(a) \leq \widetilde{\delta}(ab)$ *para quaisquer a, b em $D \setminus \{0\}$.*

(2) $\widetilde{\delta}(1)$ *é o valor mínimo de δ em $D \setminus \{0\}$.*

(3) $\widetilde{\delta}(a) \leq \delta(a)$ *para qualquer a em $D \setminus \{0\}$.*

Solução: Começamos por demonstrar as propriedades (1)-(3) e deixamos para o fim a prova de que $\widetilde{\delta}$ é de facto uma função euclidiana em D.

(1) Sejam a, b em $D \setminus \{0\}$. Pela definição de $\widetilde{\delta}$, $\widetilde{\delta}(ab) = \delta(abc_0)$ para algum $c_0 \in D \setminus \{0\}$. Mas abc_0 é um múltiplo de a logo $\widetilde{\delta}(a) \leq \delta(abc_0) = \widetilde{\delta}(ab)$.

(2) Óbvio (da definição de $\widetilde{\delta}$).

(3) $\widetilde{\delta}(a) = \min\limits_{b \neq 0} \delta(ab) \leq \delta(a \cdot 1) = \delta(a)$.

Mostremos agora que D admite um algoritmo da divisão relativamenta a $\widetilde{\delta}$. Sejam $a, b \in D$ com $b \neq 0$. Claro que $\widetilde{\delta}(b) = \delta(bc_0)$ para algum $c_0 \in D \setminus \{0\}$. Pelo algoritmo da divisão em (D, δ) para o par a, bc_0 existem $q, r \in D$ tais que $a = (bc_0)q_0 + r_0$ com $r_0 = 0$ ou $\delta(r_0) < \delta(bc_0)$. Basta agora tomar $q = c_0q_0$ e $r = r_0$. De facto, $a = bq + r$, e $r = 0$ ou (usando a propriedade (3)) $\widetilde{\delta}(r) \leq \delta(r) < \delta(bc_0) = \widetilde{\delta}(b)$.