Aplicações

Construções com régua e compasso

Nesta altura do curso já podemos tirar dividendos dos nossos esforços: o grau de uma extensão algébrica é uma ferramenta muito poderosa. Antes mesmo de entrarmos a sério na Teoria de Galois, podemos aplicar o grau à resolução de vários problemas geométricos famosos, inventados pelos Gregos.

Os matemáticos da Grécia Antiga exprimiam de forma geométrica muitos dos seus conceitos e ideias. Mas, segundo Platão, as únicas figuras geométricas perfeitas eram a recta e a circunferência. Isto tinha o efeito de restringir os instrumentos disponíveis para efectuar construções geométricas a dois: em geral, só admitiam como válidas construções geométricas que pudessem ser obtidas pelo uso exclusivo do compasso e da régua não graduada (isto é, sem escala).

Apesar da sua grande habilidade, há algumas construções aparentemente simples para as quais não conseguiram descobrir um método de construção. Não é surpreendente que os Gregos tenham achado essas construções tão difíceis; são impossíveis de realizar! Mas os Gregos não tinham nem os métodos para provar essa impossibilidade nem, ao que parece, nenhuma suspeita de que as construções eram de facto impossíveis[1]

Esses problemas ficaram pois em aberto e só viriam a ser resolvidos nos finais do século XIX, com a ajuda da Álgebra, depois de convenientemente reformulados em questões da Teoria dos Corpos (mais concretamente, extensões de corpos).

Entre os mais famosos desses problemas contam-se quatro que ficaram conhecidos por:

[I] **Problema da duplicação de um cubo**;

[II] **Problema da trissecção de um ângulo arbitrário**;

[III] **Problema da quadratura do círculo**;

[IV] **Problema da inscrição de um heptágono regular numa circunferência**.

[1]Sabiam, no entanto, que, sem essas imposições "platónicas", os problemas podiam ser resolvidos.

Descrição dos problemas

O Problema I consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado. Se tomarmos um cubo de aresta 1, o problema consiste em construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$.

O Problema II questiona a existência de um método geral de divisão de qualquer ângulo em três partes iguais (há vários ângulos que podem ser trissecados com régua e compasso; a questão está em saber se todos o são).

O Problema III está ligado ao cálculo da área do círculo. Consiste em saber se é possível construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado. Partindo de um círculo de raio unitário a questão resume-se a construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$.

Quanto ao Problema IV, consiste em inscrever um heptágono regular numa circunferência dada.

História dos problemas

Uma referência ao Problema I aparece num documento antigo, supostamente escrito por Eratóstenes ao Rei Ptolomeu III cerca do ano 240 a.C.:

> *Diz-se que um dos antigos poetas trágicos descreveu Minos preparando um túmulo cúbico para Glaucus e declarando, quando observou que cada lado media 100 pés: "O túmulo que escolhestes é pequeno demais para túmulo real. Duplica-o [em volume] sem lhe modificar a forma. Conseguirás isso se duplicares cada lado do túmulo." Mas estava errado. Quando se duplicam os lados, a área aumenta quatro vezes e o volume oito vezes. Tornou-se um assunto de investigação entre os geómetras o modo como se poderá duplicar o volume dado sem modificar a forma. E este problema foi chamado de duplicação do cubo, pois dado um cubo pretendia-se duplicá-lo ...*

As origens do Problema II são obscuras. Os Gregos preocupavam-se com a construção de polígonos regulares, e é bem provável que o problema da trissecção tenha surgido neste contexto, pois a construção de um polígono regular com nove lados necessita da trissecção de um ângulo.

A história do Problema III está ligada ao cálculo da área de um círculo. O *Papiro de Rhind*[2] contém informação acerca disto. O manuscrito foi copiado pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a.C., a partir de um trabalho mais antigo.

[2] O manuscrito matemático mais antigo que se conhece.

Ao longo dos anos estes problemas foram abordados por muitos matemáticos. Curiosamente têm também fascinado muitos matemáticos amadores. No tempo dos gregos usava-se a palavra especial $\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\zeta\varepsilon\iota\nu$[3] para denominar estes curiosos. Em 1775, a Academia de Paris achou por bem proteger os seus funcionários da perda de tempo e energia com a examinação das "soluções" destes problemas apresentadas por matemáticos amadores; decretou que mais nenhuma solução destes problemas seria analisada.

Estes problemas foram finalmente resolvidos no século XIX. Em 1837, Wantzel resolveu os Problemas I, II e IV. Em 1882, Lindemann solucionou o terceiro, ao provar a transcendência de π sobre o corpo dos racionais.

Porque é que decorreram tantos séculos até estes problemas serem resolvidos? Por dois tipos de razões:

- as construções requeridas são impossíveis;

- Embora os problemas sejam geométricos, foi recorrendo a técnicas algébricas que essa impossibilidade foi demonstrada. Essas técnicas, nomeadamente a construção de extensões do corpo dos números racionais, só começaram a desenvolver-se no século XIX.

Descrição das regras impostas pelos Gregos

Todos aprendemos a efectuar construções geométricas com compasso e régua não graduada, isto é utilizando a régua apenas para traçar o segmento que une (ou a recta que passa por) dois pontos. Por exemplo, sabemos bissecar um ângulo, construir a mediatriz dum segmento, traçar por um ponto uma recta paralela a uma recta dada, etc. No entanto, com os mesmos instrumentos e regras, há várias construções que são impossíveis de realizar, tais como as dos problemas famosos acima referidos, como veremos.

As regras para estas construções foram impostas pelos geómetras gregos e são muito estritas. Usando somente uma régua e um compasso, podemos realizar uma grande variedade de construções[4]. Em todos estes problemas são-nos dados alguns pontos, alguns segmentos de recta passando por esses pontos e, eventualmente, algumas circunferências. A partir deles podemos construir, usando a régua e o compasso como adiante se descreve, novos segmentos e circunferências. Note que

[3] Significa *preencher o tempo com a quadratura*.

[4] Algumas destas construções estão descritas com pormenor em muitos livros de Geometria Plana.

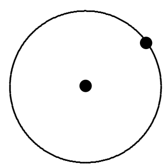
a régua é usada como mero instrumento auxiliar para traçar linhas direitas mas não para medir ou marcar distâncias. Obtemos novos pontos onde o novo segmento de recta ou a nova circunferência intersecta outro segmento ou circunferência já existentes.

As regras de utilização da régua e do compasso são então as seguintes:

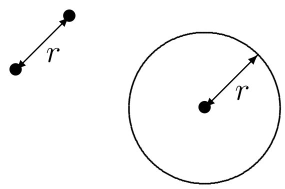
(1) A régua pode ser usada para traçar uma nova linha, com a extensão que quisermos, através de quaisquer dois pontos previamente na figura;

(2) O compasso pode ser usado para traçar novas circunferências, de dois modos:

(a) Coloque uma das extremidades do compasso num dos pontos dados e a outra extremidade noutro dos pontos dados e trace a circunferência (ou um arco de circunferência):



(b) Coloque o compasso como em (a), mas de seguida mova (sem alterar a abertura do compasso) uma das extremidades para um terceiro ponto na figura dada. Trace aí a circunferência (ou arco de circunferência), com este terceiro ponto como centro:



Observação. Em rigor, o nosso uso do compasso é mais versátil que o permitido pelos Gregos. De facto, o compasso imaginado pelos Gregos só podia ser utilizado segundo a regra 2(a) (não admitiam a regra 2(b)). Presumivelmente, os Gregos olhavam o seu compasso como não tendo existência logo que fosse levantado da folha de papel e portanto não podia ser utilizado directamente para transferir comprimentos, como em 2(b). Contudo, ao admitirmos a regra 2(b) não estamos a alterar o jogo em nada, pois pode-se provar que qualquer construção que se possa fazer seguindo as regras 1, 2(a) e 2(b) pode também ser realizada somente com as regras 1 e 2(a). A única diferença é que esta última construção poderá eventualmente envolver mais passos do que a primeira.

Não é difícil descrever construções, nas condições referidas, que levem, por exemplo, à divisão de um segmento de recta num número qualquer de partes iguais, ao traçado de uma paralela ou de uma perpendicular a uma recta dada, passando por um ponto dado, à bissecção de um ângulo dado, etc. Por exemplo:

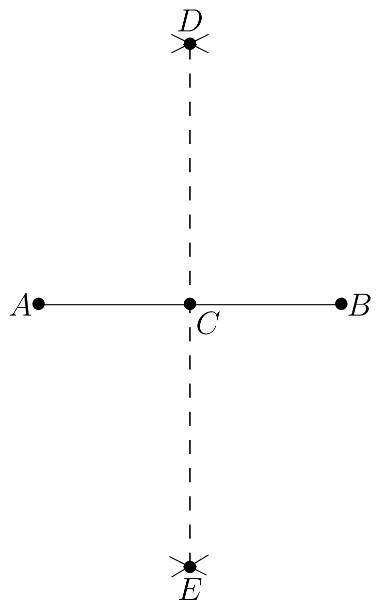
Problema [Bissecção de um segmento de recta]: Dados dois pontos A e B, construa o ponto médio C do segmento de recta $[AB]$.

Método de construção:

(1) Ponha o compasso em A e estenda a outra extremidade do compasso até que esteja exactamente em B. Desenhe então um arco na região acima de $[AB]$ e um outro na região abaixo de $[AB]$.

(2) Ponha o compasso em B e estenda a outra extremidade até que esteja exactamente em A. Desenhe arcos que intersectem os arcos de (1). Designe os pontos de intersecção por D e E, respectivamente.

(3) Com o auxílio da régua trace o segmento $[DE]$. O ponto C requerido é o ponto de intersecção de $[DE]$ com $[AB]$:



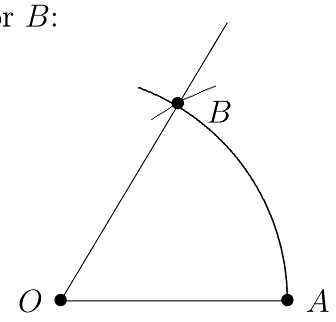
`[É claro que é preciso provar que` C `é de facto o ponto médio de` $[AB]$`, o que pode ser feito sem grande dificuldade]`

■

Outros exemplos:

Problema [Construção de um ângulo de $60°$]: Dados dois pontos O e A, construa o ponto B tal que $\widehat{AOB} = 60°$.

Método de construção: Trace arcos de raio $[OA]$ e centros em O e A. Designe o seu ponto de intersecção por B:

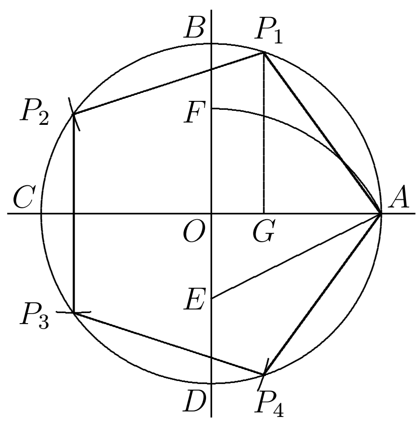


`[O ângulo` $\widehat{AOB}$ `mede` $60°$`, uma vez que o triângulo` $[AOB]$ `é equilátero]`

■

Problema [Inscrição de um pentágono regular numa circunferência (unitária)]: Dados os pontos $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, -1)$ numa circunferência unitária, construa um pentágono regular inscrito nessa circunferência.

Método de construção: Dividindo o segmento $[OD]$ em duas partes iguais, marque o ponto E. Com o compasso centrado em E obtenha o arco $[AF]$. Obtenha o ponto G no eixo horizontal, de forma a que $\overline{OG} = \overline{OF}/2$. Finalmente obtenha o vértice P_1 do pentágono por intersecção da circunferência com a recta vertical que passa por G. Os restantes vértices P_2, P_3 e P_4 podem construir-se sequencialmente, a partir de P_1, com o compasso com uma abertura igual a $\overline{AP_1}$:



`[`$[AP_1]$ `é, de facto, lado de um pentágono regular inscrito na` circunferência: basta observar que $P_1 = (\cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5})$, pois, como $\overline{EA} = \sqrt{5}/2$, então $\overline{OF} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $\overline{OG} = \frac{\overline{OF}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}$]

■

Por volta de 300 a.C., nos diversos volumes dos "Elementos", Euclides sistematizou uma grande variedade de construções possíveis de realizar com régua e compasso (veja, por exemplo, [T. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover, 1956]):

- *Livro 1, Proposição 1.* Dado um segmento de recta, construir um triângulo equilátero em que um dos lados seja esse segmento.
- *Livro 1, Proposição 2.* Com extremo num ponto dado, traçar um segmento de recta igual a um segmento de recta dado.
- *Livro 1, Proposição 9.* Bissecar um ângulo dado.
- *Livro 1, Proposição 42.* Construir um paralelogramo com área igual à de um ângulo dado e que tenha um ângulo igual a um ângulo dado.
- *Livro 1, Proposição 44.* Construir um paralelogramo com área igual à de um triângulo dado, que tenha um ângulo igual a um ângulo dado e um lado igual a um segmento de recta dado.
- *Livro 1, Proposição 45.* Construir um paralelogramo com área igual à de um polígono dado e que tenha um ângulo igual a um ângulo dado.
- *Livro 2, Proposição 14.* Construir um quadrado com área igual à de um polígono dado.
- *Livro 4, Proposição 2.* Inscrever, numa circunferência dada, um triângulo equiangular a um triângulo dado.
- *Livro 4, Proposição 6.* Inscrever um quadrado numa circunferência dada.
- *Livro 4, Proposição 11.* Inscrever um pentágono regular numa circunferência dada.
- *Livro 4, Proposição 15.* Inscrever um hexágono regular numa circunferência dada.

- *Livro 4, Proposição 16.* Inscrever um polígono regular com 15 lados numa circunferência dada.

Para mais exemplos de construções, consulte o livro [A. Jones, S. A. Morris e K. R. Pearson, *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Springer, 1994]. Aí pode ver, entre muitas outras coisas, que se podem construir, sem grande dificuldade, somas, produtos, quocientes e raízes quadradas:

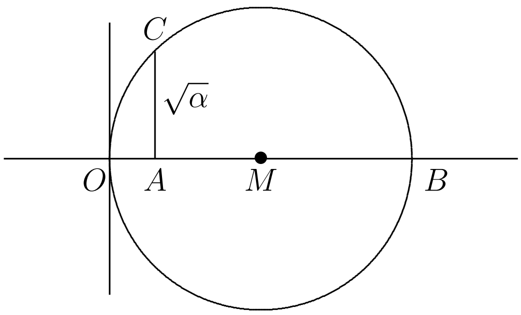
- (*Soma*) Dados dois segmentos de recta de comprimentos α e β, é possível construir segmentos de recta de comprimentos $\alpha \pm \beta$.

- (*Produto*) Dados dois segmentos de recta de comprimentos α e β, é possível construir um segmento de recta de comprimento $\alpha\beta$.

- (*Quociente*) Dados dois segmentos de recta de comprimentos α e $\beta \neq 0$, é possível construir um segmento de recta de comprimento α/β.

- (*Raiz quadrada*) Dado um segmento de recta de comprimento $\alpha > 0$, é possível construir um segmento de recta de comprimento $\sqrt{\alpha}$.

  A construção neste caso pode ser realizada do seguinte modo: partindo dos extremos $A = (1, 0)$ e $B = (1 + \alpha, 0)$ do segmento, e da origem $O = (0, 0)$, construímos o ponto $(1, 1)$ e o ponto médio M do segmento $[OB]$. A intersecção da circunferência de centro em M e raio $\overline{MB}$ com a recta vertical definida pelos pontos A e $(1, 1)$ dá-nos um ponto C que está à distância $\sqrt{\alpha}$ de A, uma vez que $\overline{AM} = \frac{\alpha+1}{2} + 1$ e $\overline{MC} = \frac{\alpha+1}{2}$:



Portanto, começando com um segmento de comprimento 1, conseguimos construir todos os comprimentos racionais e alguns irracionais.

Todas estas construções devem seguir rigorosamente as regras do jogo. São portanto consideradas "ilegais" as construções que usem régua graduada ou curvas auxiliares, as construções aproximadas ou as construções com régua e compasso num número infinito de passos.

Retornemos aos quatro problemas famosos. O Problema I consiste em construir, com régua e compasso, um cubo com volume duplo de um dado cubo. Se o lado deste cubo medir 1 unidade de comprimento, o seu volume mede $1^3 = 1$, pelo que o volume do cubo a construir deverá medir 2 e, portanto, o seu lado deverá medir $\sqrt[3]{2}$. O problema resume-se pois a construir, a partir de um segmento de comprimento 1, um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$. Como veremos, se tal fosse possível, então um determinado espaço vectorial teria a dimensão errada! Isto resolverá o Problema I.

Quanto ao Problema II, será suficiente apresentar um exemplo de um ângulo que não possa ser trissecado. Um tal exemplo é o ângulo de $60°$. Mostraremos que este ângulo só poderá ser trissecado caso o ponto $(\cos 20°, 0)$ seja construtível, o que não é o caso uma vez que $\cos 20°$ é raiz do polinómio $8x^3 - 6x - 1 = 0$ que é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Mais uma vez veremos que isto pode ser justificado de modo rigoroso considerando as dimensões possíveis para um determinado espaço vectorial.

Como também veremos, as soluções de III e IV também se baseiam na discussão da dimensão de um espaço vectorial. Por exemplo, a impossibilidade de quadrar o círculo é consequência do facto do espaço vectorial $\mathbb{Q}(\pi)$ sobre o corpo dos racionais ter dimensão infinita o que, por sua vez, é consequência de, como Lindemann provou, π ser transcendente sobre $\mathbb{Q}$.

A solução algébrica

Comecemos por formular a geometria das construções com régua e compasso em termos algébricos. A fim de enquadrarmos convenientemente o problema, consideremos o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais e seja $\mathcal{P}$ uma parte qualquer de $\mathbb{R}^2$ de cardinal maior que 1.

PONTOS DO PLANO CONSTRUTÍVEIS

Um ponto P do plano diz-se *construtível num passo a partir de* $\mathcal{P}$ se P for a intersecção de duas rectas, uma recta e uma circunferência ou duas circunferências construídas a partir de pontos de $\mathcal{P}$, usando régua e compasso, de acordo com as regras (1) e (2).

Mais geralmente, um ponto P do plano diz-se *construtível a partir de* $\mathcal{P}$ se existirem pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n = P$ tais que P_1 é construtível num passo a partir de $\mathcal{P}$ e, para cada $i = 2, 3, \ldots, n$, P_i é construtível num passo a partir de $\mathcal{P}_{i-1} := \mathcal{P} \cup \{P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}\}$.

Por exemplo, no problema da bissecção de um segmento de recta, D e E são construtíveis num passo a partir de $\mathcal{P} = \{A, B\}$, e C é construtível a partir de $\mathcal{P}$ (em dois passos).

Seja K_0 o subcorpo de $\mathbb{R}$ gerado pelo conjunto

$$\{x, y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \mathcal{P}\},$$

e seja $K_i = K_{i-1}(x_i, y_i)$, onde $P_i = (x_i, y_i)$. Desta construção resulta obviamente que

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R}.$$

[Observe: quando $\mathcal{P} = \{(0,0),(1,0)\}$, $K_0 = \mathbb{Q}$]

Por exemplo, no problema da bissecção de um segmento de recta, supondo $A = (0,0)$ e $B = (1,0)$, temos $K_0 = \mathbb{Q}$ e $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = K_2$, pois $D = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $E = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ e $C = (1/2, 0)$.

O lema seguinte resulta do facto de as rectas e as circunferências utilizadas para a construção dos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ serem definidas por equações de graus 1 e 2 pois, como é bem sabido, uma recta de $\mathbb{R}^2$ pode ser definida, relativamente a um referencial ortonormado, por uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}),$$

e uma circunferência pode ser definida por uma equação do tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

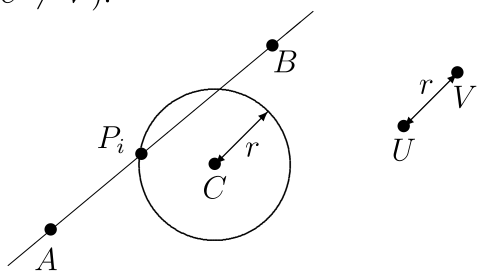
Lema. *Os números reais x_i e y_i são raízes em K_i de polinómios de coeficientes em K_{i-1} de grau 1 ou 2; em particular $[K_i : K_{i-1}] \in \{1, 2, 4\}$.*

Demonstração. Como $P_i = (x_i, y_i)$ é construtível a partir de $\mathcal{P}_{i-1}$, então ou é

- a intersecção de duas rectas definidas por pontos de $\mathcal{P}_{i-1}$, ou
- a intersecção de uma recta e uma circunferência definidas por pontos de $\mathcal{P}_{i-1}$, ou
- a intersecção de duas circunferências definidas por pontos de $\mathcal{P}_{i-1}$.

O primeiro caso é óbvio pelo que o deixamos como exercício: neste caso x_i e y_i pertencem mesmo a K_{i-1}, e $[K_i : K_{i-1}] = 1$. Quanto ao terceiro, pode ser deduzido imediatamente a partir do segundo caso, pelo que só provaremos este.

Suponhamos então que P_i é um ponto de intersecção de uma recta l, definida pelos pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ de $\mathcal{P}_{i-1}$, e uma circunferência c de centro $C = (c_1, c_2) \in \mathcal{P}_{i-1}$ e raio r dado pela distância entre os pontos $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ de $\mathcal{P}_{i-1}$ ($U \neq V$).



A equação de l é

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$$

(onde deixamos os casos $a_1 = b_1$ ou $a_2 = b_2$ como exercício). A equação de c é

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

Portanto, (x_i, y_i) é solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2} \\ \\ (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2 \end{cases}$$

onde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, u_1, u_2, v_1, v_2 \in K_{i-1}$ e, pelo Teorema de Pitágoras,

$$r^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 \in K_{i-1}.$$

Resolvendo em ordem a x concluímos que x_i é raiz do polinómio quadrático

$$(x - c_1)^2 + \Big(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) + a_2 - c_2\Big)^2 - r^2 \in K_{i-1}[x].$$

Se este polinómio for irredutível sobre K_{i-1} então $[K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}] = 2$. Senão $[K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}] = 1$.

Analogamente, resolvendo em ordem a y, concluímos que y_i é raiz de um polinómio quadrático em $K_{i-1}[y]$, pelo que também $[K_{i-1}(y_i) : K_{i-1}] \in \{1, 2\}$.

Em conclusão, em qualquer um dos três casos, $[K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}]$ e $[K_{i-1}(y_i) : K_{i-1}]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, só podem tomar os valores 1 ou 2 e então, como

$$[K_{i-1}(x_i, y_i) : K_{i-1}(x_i)] \leq [K_{i-1}(y_i) : K_{i-1}],$$

também $[K_{i-1}(x_i, y_i) : K_{i-1}(x_i)] \in \{1, 2\}$. Consequentemente,

$$[K_i : K_{i-1}] = [K_{i-1}(x_i, y_i) : K_{i-1}(x_i)][K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}]$$

só pode ser 1, 2 ou 4. ∎