

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m

Cotações

19/01/05

1. Seja A o anel $(\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}, +, \cdot)$ das funções racionais de variável racional, onde $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
 - (a) Determine a identidade de A e averigúe se A é um domínio de integridade. Qual é a característica de A ?
 - (b) Considere o ideal $I = \{f \in A \mid f(2) = 0\}$ de A . Determine o anel quociente A/I e diga se I é maximal.

2. Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, caso contrário apresente uma justificação sucinta da sua falsidade:
 - (a) Todo o domínio de integridade finito é um corpo.
 - (b) Em $\mathbb{F}_3[x]$, $\text{mdc}(x^7 + x^6 + 2x^5 + x^3 + 2x^2 + 2x, 2x^5 + x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2$.
 - (c) É possível, usando régua e compasso, construir um cubo com volume igual ao de uma esfera dada.
 - (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ é uma extensão de Galois de \mathbb{Q} .

3. Responda a quatro das seguintes questões:
 - (a) Mostre que, para quaisquer inteiros a e b , o polinómio $x^3 + (2a+1)x + (2b+1)$ é irredutível sobre \mathbb{Q} .
 - (b) Determine a dimensão e uma base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha)$, onde α é uma raiz de $x^3 + 7x + 3$.
 - (c) Para o elemento α da alínea anterior, determine o inverso de $\alpha^2 + 7$ na extensão simples $\mathbb{Q}(\alpha)$.
 - (d) Escreva a tabela do grupo de Galois do polinómio $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
 - (e) Prove que o número de elementos de qualquer corpo finito é da forma p^n , para algum primo p e algum natural n .
 - (f) Liste os subcorpos do corpo \mathbb{F}_{256} . Qual deles é o subcorpo primo?

4. Seja \mathcal{C} o código $(7, 3)$ -linear binário definido pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 - (a) Qual é o número de palavras de \mathcal{C} ?
 - (b) Calcule a distância mínima $\delta(\mathcal{C})$. Poderá \mathcal{C} detectar erros singulares? E corrigir?
 - (c) Corrija, caso tal seja possível, os erros nas seguintes mensagens: 0001000, 1011110.