
O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) O polinómio $x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_7$. [ ] [×]

   `[É redutível pois tem uma raiz em` $\mathbb{Z}_7$`: 1.]`

   (b) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. [×] [ ]

   `[Porque` $\sqrt{2}$ `e` $\sqrt[3]{4}$ `são ambos algébricos sobre` $\mathbb{Q}$ `e a soma de quaisquer dois números algébricos ainda é um número algébrico:` $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{4})$ `e, como` $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}) : \mathbb{Q}] = 6$`, os 7 vectores 1,` $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2, \ldots, (\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^6$ `de` $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{4})$ `são linearmente dependentes; isto significa que existem racionais` $a_0, a_1, \ldots, a_6$ `não todos nulos tais que` $a_0 + a_1(\sqrt{2} + \sqrt[3]{4}) + a_2(\sqrt{2} + \sqrt[3]{4})^2 + \cdots + a_6(\sqrt{2} + \sqrt[3]{4})^6 = 0$`, ou seja,` $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4}$ `é raiz do polinómio não nulo` $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6 \in \mathbb{Q}[x]$`.]`

   (c) A extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ de $\mathbb{Q}$ tem dimensão 6. [ ] [×]

   `[`$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})][\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 4$ `pois` $x^2 - 2$ `é o polinómio mínimo de` $\sqrt{2}$ `sobre` $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ `e` $x^2 - 3$ `é o polinómio mínimo de` $\sqrt{3}$ `sobre` $\mathbb{Q}$`.]`

   (d) $-2\theta^2 + 2\theta$ é o inverso de $\frac{\theta+1}{2}$ na extensão $\mathbb{Q}(\theta)$, onde $\theta^3 - \theta + 1 = 0$. [×] [ ]

   `[`$\frac{\theta+1}{2}(-2\theta^2 + 2\theta) = (\theta + 1)(-\theta^2 + \theta) = -\theta^3 + \theta^2 - \theta^2 + \theta = -\theta^3 + \theta = 1$`.]`

   (e) Um polígono regular de 9 lados pode ser construído com régua e compasso. [ ] [×]

   `[`$9 = 3\times 3$ `não é da forma` $2^\alpha p_1 \cdots p_n$ `(`$\alpha \in \mathbb{N}_0$`,` p_i`: primos de Fermat distintos).]`

2. Considere o polinómio $p(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (a) Mostre que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se e só se $8x^3 - 6x - 1$ o é. As possíveis raízes racionais deste último polinómio são: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.

   $$\begin{aligned} \mathbb{Q}[x]/\langle p(x)\rangle &= \{a(x) + \langle p(x)\rangle \mid a(x) \in \mathbb{Q}[x]\} = \{a(x) + \langle p(x)\rangle \mid a(x) \in \mathbb{Q}[x], gr(a(x)) \leq 2\} \\ &\cong \mathbb{Q}(\theta), \end{aligned}$$

   onde $4\theta^3 - 3\theta - \frac{1}{2} = 0$. Como $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, então $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 3$.
